G. PÓLYA

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ?

Un nou aspect al metodei matematice

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
București — 1965

DIN PREFAȚA LA PRIMUL TIRAJ

O descoperire mare rezolvă o problemă mare, dar există un grăunte de descoperire în soluția oricărei probleme. Puteți avea în față o problemă modestă; dacă însă ea vă stîrnește curiozitatea și vă pune în joc facultățile de inventivitate, și dacă o rezolvați prin mijloace proprii, puteți simți încordarea dinaintea descoperirii și vă puteți bucura de triumful realizării ei. Astfel de experiențe, la o vîrstă de mare receptivitate, pot crea gustul pentru munca intelectuală, punîndu-și pentru toată viața amprenta asupra minții și asupra caracterului.

Așadar, profesorul de matematică dispune de mari posibilități. Dacă el își umple timpul muștruluindu-și elevii cu operații rutiniere, el le ucide interesul, le frînează dezvoltarea intelectuală și-și folosește prost posibilitățile. Dacă însă stîrnește curiozitatea elevilor, propunîndu-le probleme proporționale cu cunoștințele lor și dacă îi ajută să-și rezolve problemele prin întrebări care-i stimulează, el le poate inocula gustul pentru o gîndire independentă și să le dezvolte aptitudinile corespunzătoare.

De asemenea, elevul a cărui programă cuprinde un curs de matematică, dispune de posibilități deosebite. Bineînțeles, aceste posibilități se pierd, dacă el consideră matematica drept un obiect la care trebuie să dea un anumit număr de examene și pe care îl va uita cît mai repede după examenul de absolvire. Aceste posibilități se pot pierde și în cazul cînd elevul are anumite aptitudini naturale pentru matematică, deoarece, la fel ca oricare altul, el trebuie să-și descopere talentele și gusturile; el nu poate ști dacă îi place budinca cu zmeură, în caz că n-a gustat-o niciodată. El poate ajunge însă să constate că o problemă de matematică poate fi tot atît de captivantă ca un joc de cuvinte încrucișate sau că o muncă intelectuală încordată poate reprezenta un exercițiu tot atît de oportun ca și o partidă dificilă de tenis. După ce

a gustat plăcerea matematicii, nu o va mai uita cu ușurință și există atunci șanse mari ca matematica să ajungă să însemne ceva pentru el: o preocupare de amator, un instrument în profesiunea sa, chiar profesiunea sa sau o mare ambiție.

Autorul își amintește de vremea cînd era student, un student destul de ambițios, dornic să înțeleagă un pic de matematică și de fizică. Asculta prelegeri, citea cărți, căuta să asimileze soluțiile și faptele care îi erau prezentate, dar exista o întrebare care îl tulbura mereu: „Da, soluția pare să meargă, face impresia că este corectă; dar cum poate fi inventată o astfel de soluție? Da, acest experiment pare să-și atingă scopul, arată ca un fapt; dar cum pot oamenii să descopere astfel de fapte? Și cum aș putea eu însumi să inventez sau să descopăr astfel de lucruri?" Astăzi, autorul predă matematica la universitate; el își închipuie sau speră că unii dintre studenții săi mai însetați de cunoștințe își pun întrebări asemănătoare și, de aceea, încearcă să le satisfacă curiozitatea. Căutînd să înțeleagă soluția cutărei sau cutărei probleme, precum și motivarea soluției și procedeele prin care a fost obținută, încercînd să explice altora aceste motivări și procedee, el a fost condus pînă la urmă să scrie cartea de față. Autorul speră că ea va fi folositoare profesorilor care doresc să dezvolte aptitudinile elevilor lor în domeniul rezolvării problemelor, ca și elevilor dornici să-și dezvolte singuri aptitudinile.

Deși această carte acordă o atenție specială cerințelor celor ce învață și predau matematica, ea va interesa pe oricine este preocupat de căile și de mijloacele care duc la invenții și descoperiri. Acest interes pare să fie mult mai răspîndit decît am crede la prima vedere. Spațiul pe care ziarele și revistele pentru marele public îl acordă cuvintelor încrucișate și altor jocuri pare să arate că oamenii consacră un anumit timp rezolvării unor probleme fără valoare practică. La baza dorinței de a soluționa diverse probleme care nu conferă avantaje materiale ar putea sta o curiozitate mai profundă, o dorință de a înțelege căile și mijloacele, motivările și procedeele de rezolvare.

Paginile ce urmează sînt scrise întrucîtva concis, dar cît se poate de simplu și se întemeiază pe un studiu îndelungat și serios al metodelor de rezolvare. Acest gen de studiu, căruia unii autori îi spun *euristică*, nu este la modă astăzi, dar are un trecut bogat și, poate, un oarecare viitor.

Studiind metodele de rezolvare a problemelor, ni se dezvăluie o altă față a matematicii. Da, matematica are două

fețe: este știința riguroasă a lui Euclid, dar ea este și altceva Prezentată în maniera lui Euclid, matematica apare ca o știință sistematică, deductivă; dar în procesul creării ei, matematica se prezintă ca o știință experimentală, inductivă. Ambele aspecte sînt tot atît de vechi ca și matematica însăși. Însă al doilea aspect este nou într-o singură privință: matematica *in statu nascendi*, în procesul invenției, nu a fost niciodată pînă acum prezentată în acest mod nici celui ce învață, nici celui ce predă, nici marelui public.

Obiectul euristicii are variate legături cu alte științe, matematicienii, logicienii, psihologii, pedagogii sau chiar filozofii pot revendica diversele părți ale ei ca aparținînd domeniului lor de specialitate. Dîndu-și bine seama de posibilitatea unor critici venite din toate aceste părți și perfect conștient de limitele sale, autorul are o singură pretenție: el posedă o anumită experiență în rezolvarea problemelor și în predarea matematicii la diferite niveluri.

Subiectul acestei lucrări este tratat mai pe larg într-o carte mai amplă pe care autorul o pregătește în prezent.

Universitatea Stanford, 1 august, 1944.

DIN PREFAȚA LA TIRAJUL AL ȘAPTELEA

Sînt bucuros să anunț că am izbutit acum să îndeplinesc, cel puțin în parte, o promisiune făcută în prefața la primul tiraj: cele două volume *Inducția și analogia în matematică* și *Modele de raționament plauzibil*, care constituie recenta mea lucrare *Matematica și raționamentele plauzibile*[1], continuă linia de gîndire începută în *Cum rezolvăm o problemă?*

Zürich, 30 august, 1954

---

[1]. Vezi G. Pólya, *Matematica și raționamentele plauzibile*, vol. I și II, Ed. Științifică, București, 1962 — *N.R.*

PREFAȚĂ LA EDIȚIA A DOUA

Ediția a doua adaugă, în afară de unele îmbunătățiri de mică importanță, o nouă parte, a patra, *P r o b l e m e, s u g e s t i i, s o l u ț i i.*

Pe cînd prezenta ediție se afla sub tipar, a apărut un studiu (Educational Testing Service, Princeton, N.J.; cf. *Time*, 18 iunie, 1956), care pare să fi formulat unele observații juste; ele nu sînt noi pentru cei în cunoștință de cauză, dar era de mult timpul să fie spuse marelui public: „... matematica se bucură de îndoielnica onoare de a fi materia cea mai puțin populară din programa analitică... Viitorii profesori trec prin școala elementară, unde învață să urască matematica... Ei se întorc în școala elementară pentru a învăța o nouă generație să o urască".

Nădăjduiesc că prezenta ediție, destinată unei difuzări mai largi, va convinge pe unii dintre cititorii ei că matematica, pe lîngă faptul că este un drum necesar spre tehnică și spre știință, poate fi captivantă și poate deschide perspective activității intelectuale la nivelul cel mai înalt.

Zürich, 30 iunie, 1956

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ ?

Înțelegerea problemei

1. Trebuie *să înțelegem* problema.

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?

Poate fi satisfăcută condiția? Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta? Sau este insuficientă? Sau redondantă? Sau contradictorie?

Să facem un desen. Să introducem notații corespunzătoare.

Să separăm diversele părți ale condiției. Le putem scrie în limbaj matematic?

Întocmirea unui plan

2. Să găsim legătura dintre date și necunoscută.

Am mai întîlnit această problemă? Sau poate că am avut de-a face cu ea, într-o formă oarecum diferită?

Nu este exclus să fim puși în situația de a considera probleme auxiliare dacă nu izbutim să găsim o legătură directă.

Cunoaștem vreo problemă înrudită? Cunoaștem vreo teoremă care ar putea fi utilă aici?

Să cercetăm necunoscuta! Și să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară.

Eventual, ar trebui obținut un *plan* al soluției.

Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Am putea să o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul? Am putea cumva să-i folosim metoda? Nu am putea să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă? S-ar putea reformula problema? Am putea s-o reformulăm oarecum altfel? Să revenim la definiții. Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. Am putea să imaginăm o problemă înrudită și mai accesibilă? O problemă mai generală? O problemă mai particulară? O problemă analogă?

Ştim să rezolvăm o parte a problemei? Să păstrăm numai o parte a condiţiei, omiţînd restul; în ce măsură este acum determinată necunoscuta, cum mai poate ea să varieze? Am putea deduce ceva util din datele problemei? Ne-am putea imagina alte date, adecvate pentru a determina necunoscuta? Am putea schimba necunoscuta sau datele, sau şi pe una şi pe celelalte, dacă este cazul, astfel încît noua necunoscută să fie mai strîns legată de noile date?

Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiţie? S-a ţinut seama de toate noţiunile esenţiale care intervin în problemă?

3.

Să ne realizăm planul.

Realizarea planului

În cadrul realizării planului soluţiei, *se verifică fiecare pas*. Ne putem da limpede seama că pasul este corect? Putem demonstra că este corect?

4.

Să analizăm rezultatul obţinut.

Privirea retrospectivă

Se poate *verifica rezultatul*? Putem verifica argumentarea? Se poate obţine rezultatul şi pe altă cale? Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire? Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ ?

(Variantă prescurtată)

1. *Căutăm să înţelegem problema.*
2. *Găsim calea de la necunoscută la date, considerînd, eventual, probleme intermediare* („*analiză*").
3. *Realizăm ideea soluţiei* („*sinteză*").
4. *Verificăm rezultatul şi-l apreciem critic.*

2.

Enunţăm relaţia (sau relaţiile) dintre necunoscută şi date.

Transformăm elementele necunoscute. Încercăm să introducem necunoscute noi, mai apropiate de datele problemei.

Transformăm elementele date. Încercăm să obţinem astfel elemente noi, mai apropiate de necunoscutele pe care le căutăm.

Rezolvăm numai parţial problema.

Satisfacem numai parţial condiţia; în ce măsură mai rămîne necunoscuta nedeterminată? (Locuri geometrice!)

Generalizăm. Examinăm cazurile particulare. Aplicăm analogii.

3.

Verificăm corectitudinea fiecărui pas, păstrînd numai ceea ce „concepem cu toată claritatea sau deducem cu o certitudine deplină" (*Descartes*)

1. Ce spune problema? Ce este dat? Ce trebuie aflat?

Determină datele necunoscuta? Sau sînt insuficiente, — redondante?

Se poate da problemei o altă formulare?

Se poate găsi vreo legătură între problema noastră şi o problemă a cărei soluţie o cunoaştem? Sau cu una care se rezolvă mai simplu? Sau care se rezolvă direct?

Aceste întrebări trebuie puse ori de cîte ori elevul se opreşte în rezolvarea problemei, la rezolvarea fiecărei probleme intermediare. În plus: Au fost folosite toate datele problemei?

„Înlocuim termenii prin definiţiile lor". (*Pascal*)

4.

Este rezultatul plauzibil? De ce?

S-ar putea face o verificare?

Nu există vreo altă cale care să ducă la acelaşi rezultat? Vreo cale mai directă? Ce rezultate se mai pot obţine pe aceeaşi cale?

---

1 Cf. nota de la p. 33.

INTRODUCERE

Considerațiile care urmează sînt grupate în jurul listei precedente de întrebări și recomandări, intitulată Cum rezolvăm o problemă? Orice întrebare sau recomandare citată de aici va fi tipărită cu *cursive*, iar la ansamblul listei ne vom referi prin „lista" sau „lista noastră".

În paginile următoare va fi discutat scopul listei, va fi ilustrată prin exemple utilizarea ei practică și vor fi explicate noțiunile și operațiile intelectuale care stau la baza ei. Ca explicație preliminară, putem spune doar atît: dacă vă veți adresa singuri, într-un mod corect, acestor întrebări și recomandări, ele vă vor ajuta să rezolvați problema. Dacă, folosindu-le corect, veți adresa aceleași întrebări și recomandări unuia dintre elevii dumneavoastră, îl veți ajuta să-și rezolve problema.

Cartea cuprinde patru părți.

Titlul primei părți este „În clasă". Ea conține douăzeci de puncte. Fiecare punct va fi citat împreună cu numărul său, tipărit cu litere grase, de exemplu „pct. **7**". Punctele **1—5** discută „Scopul" sau „Destinația" listei noastre, în linii mari. Punctele **6—17** explică ce înseamnă „Părți principale, întrebări principale" ale listei și discută un prim exemplu practic. Punctele **18, 19, 20** adaugă „Alte exemple".

Titlul părții a II-a, care este foarte scurtă, este „Cum rezolvăm o problemă?" Este scrisă sub formă de dialog: un profesor întrucîtva ideal răspunde la întrebările succinte ale unui elev întrucîtva ideal.

Partea a III-a, cea mai amplă, este un „Scurt dicționar de euristică"; o vom cita ca „Dicționarul". Ea conține 68 de articole ordonate alfabetic. De exemplu, semnificația termenului e u r i s t i c ă este explicată în articolul cu același titlu de la p. 96. Cînd titlul unui astfel de articol este citat în text, el va fi tipărit cu cursive spațiate. Anumite paragrafe

din cîteva articole au un caracter mai tehnic; acestea sînt cuprinse între paranteze drepte. Unele articole sînt foarte strîns legate de prima parte, la care adaugă noi ilustrări și comentarii mai speciale. Alte articole depășesc întrucîtva scopul primei părți și explică fondul, baza ei. Articolul cheie este *E u r i s t i c a m o d e r n ă*. Aici se explică conexiunea dintre principalele articole și planul care stă la baza „Dicționarului"; articolul conține și indicații referitoare la modul cum se pot obține informații despre cutare sau cutare punct din listă. Trebuie subliniat că există aici un plan comun și o anumită unitate, deoarece articolele din „Dicționar" prezintă ca aspect exterior o mare varietate. Există cîteva articole mai ample, consacrate discutării sistematice, dar concentrate, a unei teme mai generale; altele conțin comentarii mai particulare, pe cînd celelalte cuprind referiri sau date istorice, citate, aforisme și chiar glume.

„Dicționarul" nu trebuie citit prea repede; textul său este adesea condensat și pe alocuri este vorba despre chestiuni mai subtile. Cititorul poate consulta „Dicționarul" pentru a se informa asupra unor puncte particulare. Dacă acestea provin din experiența dobîndită din problemele rezolvate de el sau de elevii săi, lectura are șanse mult mai mari de a fi profitabilă.

Titlul părții a IV-a este „Probleme, indicații, soluții". Ea îi propune cititorului mai ambițios cîteva probleme. Fiecare dintre ele este urmată (la un interval potrivit) de o „indicație", care îi poate dezvălui o cale de acces la rezultatul expus în „soluție".

Am vorbit în repetate rînduri despre „elev" și despre „profesor" și ne vom referi mereu din nou la ei. Este cazul să menționăm că „elevul" poate fi student într-o instituție de învățămînt superior, într-o școală medie sau oricine învață matematica. De asemenea, „profesorul" poate preda într-o școală superioară, într-una medie sau poate fi orice persoană care se interesează de tehnica predării matematicii. Autorul consideră situațiile cîteodată din punctul de vedere al elevului și cîteodată din cel al profesorului (acest din urmă caz este preponderent în prima parte). Dar de cele mai multe ori (mai ales în partea a treia), punctul de vedere este cel al unei persoane care nu este nici profesor, nici elev, ci numai doritoare să rezolve o problemă care îi stă în față.

Partea I

ÎN CLASĂ

SCOPUL

1. Să-l ajutăm pe elev. Una dintre sarcinile cele mai importante ale profesorului constă în a-şi ajuta elevii. Această sarcină nu este tocmai uşoară; ea cere timp, experienţă, devotament şi principii sănătoase.

Elevul trebuie să dobîndească o cît mai mare experienţă de muncă independentă. Dacă este însă lăsat singur cu problema sa, neajutat sau ajutat insuficient, s-ar putea să nu progreseze de loc. Dacă profesorul ajută prea mult, elevului nu-i mai rămîne nimic de făcut. Profesorul trebuie să ajute, dar nici prea mult şi nici prea puţin, astfel ca elevului să-i revină o *parte raţională din muncă.*

Chiar dacă elevul nu este în stare să facă mare lucru, profesorul trebuie să-i dea iluzia că lucrează independent. Pentru a realiza aceasta, profesorul trebuie să-şi ajute elevul într-un mod discret, *nesîcîitor.*

Cel mai bine este însă ca elevul să fie ajutat într-un mod firesc. Profesorul trebuie să se pună în locul elevului, să vadă dificultăţile acestuia, să încerce a înţelege ce se întîmplă în mintea lui şi să pună o întrebare sau să-i indice un pas *care ar fi putut să-i vină în minte şi elevului.*

2. Întrebări, recomandări, operaţii intelectuale. Căutînd să-l ajute pe elev într-un mod eficient, însă discret şi firesc, profesorul este condus să pună mereu aceeaşi întrebare şi să indice mereu aceiaşi paşi. Astfel, în nenumărate probleme, trebuie să întrebăm: *Care este necunoscuta?* Putem varia cuvintele şi întreba acelaşi lucru în mai multe feluri : Ce se cere? Ce vrem să găsim? Ce trebuie să căutăm? Scopul acestor întrebări este de a concentra atenţia elevului asupra necunoscutei. Cîteodată obţinem acelaşi efect într-un mod mai firesc, printr-o recomandare: *Să cercetăm necunoscuta!* Întrebarea şi recomandarea urmăresc acelaşi efect; ele tind să declanşeze aceeaşi operaţie mintală.

Autorul a considerat că ar merita osteneala să strîngă şi să grupeze întrebările şi recomandările tipic utile elevului cînd se discută cu el o problemă. Lista pe care o studiem conţine întrebări şi recomandări de acest gen, alese şi ordonate cu grijă; ele sînt tot atît de utile pentru cineva care rezolvă probleme lucrînd individual. Dacă cititorul este suficient de familiarizat cu lista şi este în stare să vadă în spatele recomandării acţiunea pe care o sugerează, el va înţelege că, lista enumeră, în mod indirect, *operaţii intelectuale tipic utile în rezolvarea problemelor.* Aceste operaţii sînt trecute în listă potrivit ordinii în care apar cel mai frecvent.

3. Generalitatea este o importantă caracteristică a întrebărilor şi a recomandărilor cuprinse în lista noastră. Să luăm întrebările: *Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia?* Aceste întrebări au o aplicabilitate generală, le putem pune cu rezultate bune în orice fel de probleme. Folosul lor nu este limitat de subiectul problemei. Putem avea o problemă de algebră sau de geometrie, matematică sau nematematică, teoretică sau practică, o problemă serioasă sau pur şi simplu un joc; oricum ar fi ea, aceste întrebări îşi păstrează sensul şi ne pot ajuta să rezolvăm problema.

Există, ce e drept, o restricţie sau o limitare, însă ea nu are nimic a face cu subiectul problemei. Anumite întrebări şi recomandări din listă sînt aplicabile numai „problemelor de aflat (sau de găsit)", nu şi „problemelor de demonstrat". Dacă avem o problemă de acest din urmă fel, trebuie să recurgem la alte întrebări; vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat.*

4. Bunul simţ. Întrebările şi recomandările din lista noastră sînt generale şi, totodată, naturale, simple, evidente şi izvorăsc din bunul simţ. Să luăm recomandarea: *Să cercetăm necunoscuta! Şi să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeaşi necunoscută sau una similară.* Această recomandare vă pune să faceţi ce aţi fi întreprins oricum, fără să vă sfătuiască nimeni, dacă sînteţi serios preocupat de problemă. Ţi-e foame? Vrei să găseşti mîncare şi te gîndeşti la căile obişnuite pentru a o obţine. Ai o problemă de construcţie geometrică? Vrei să construieşti un triunghi şi te gîndeşti la căile obişnuite de a construi un triunghi. Ai o problemă de orice altă natură? Vrei să găseşti o anumită necunoscută şi te gîndeşti la căile obişnuite pentru a găsi o astfel de necu-

noscută sau una asemănătoare. Cine procedează astfel, urmează întocmai recomandarea citată din lista noastră. Şi este pe calea cea bună, recomandarea este bună, ea îl sfătuieşte să adopte un procedeu care, foarte frecvent, se dovedeşte încununat de succes.

Toate întrebările şi recomandările din lista noastră sînt fireşti, simple, evidente, de domeniul bunului simţ; dar ele enunţă bunul simţ în termeni generali. Ele sugerează o conduită care-i vine în minte natural oricărui om preocupat serios de problema sa şi care posedă o anumită doză de bun simţ. Însă cel ce adoptă drumul cel bun nu se preocupă, de obicei, să-şi explice comportarea într-o formă curgătoare şi, poate, nu este în stare să o exprime; lista noastră încearcă să dea o astfel de exprimare.

5. Profesor şi elev. Imitaţie şi experienţă. Punînd o întrebare sau făcînd o recomandare din listă, profesorul poate avea în vedere două obiective: 1° să-l ajute pe elev să rezolve problema la care lucrează acum; 2° să dezvolte aptitudinile elevului, astfel încît să fie capabil de a rezolva pe viitor singur problemele.

Experienţa ne arată că întrebările şi recomandările din listă, dacă sînt folosite într-un mod adecvat, îi sînt de foarte multe ori utile elevului. Ele au două caracteristici comune: bunul simţ şi generalitatea. Dat fiind că provin din bunul simţ, ele vin adesea în minte cu totul firesc; elevul le-ar fi putut găsi şi singur. Dat fiind că sînt generale, ele îl ajută pe elev într-un mod discret; ele nu fac decît să-i indice o direcţie generală şi îi lasă acestuia toate posibilităţile de a acţiona singur.

Dar cele două obiective menţionate mai sus sînt strîns legate între ele; dacă elevul reuşeşte să rezolve problema la care lucrează acum, el adaugă un pic la aptitudinile sale de a rezolva probleme. Apoi nu trebuie să uităm că întrebările noastre sînt generale, aplicabile în numeroase situaţii. Dacă aceeaşi întrebare se dovedeşte utilă în repetate rînduri, este puţin probabil ca elevul să nu-şi dea seama de aceasta, ceea ce-l va determina să-şi pună singur întrebarea într-o situaţie similară. Punîndu-şi întrebarea în repetate rînduri, el va izbuti o dată şi o dată să pună în lumină ideea adecvată. Prin această reuşită, el descoperă drumul cel bun pentru a folosi întrebarea, şi atunci el şi-a asimilat-o în mod real.

Elevul îşi poate însuşi atît de bine cîteva întrebări din lista noastră, încît devine capabil, pînă la urmă, să-şi pună întrebarea potrivită la momentul potrivit şi să realizeze într-un mod firesc şi eficient operaţia mintală corespunzătoare. Fără îndoială, un astfel de elev a extras din lista noastră cel mai mare folos posibil. Ce poate face profesorul pentru a obţine acest rezultat optim? Rezolvarea problemelor este o abilitate practică, să zicem ca înotul. Obţinem o anumită abilitate sau pricepere practică prin imitaţie şi prin exerciţiu. Încercînd să înotaţi, imitaţi ceea ce fac alţi oameni cu braţele şi cu picioarele pentru a-şi menţine capul deasupra apei şi, pînă la urmă, învăţaţi să înotaţi făcînd exerciţii de înot. Încercînd să rezolvaţi probleme, trebuie să observaţi şi să imitaţi ceea ce fac alţii cînd rezolvă probleme şi, pînă la urmă, rezolvînd probleme, învăţaţi să le rezolvaţi.

Profesorul care doreşte să dezvolte priceperile elevilor săi de a rezolva probleme trebuie să sădească în mintea lor un anumit interes pentru probleme şi să le dea toate posibilităţile de a imita şi de a exersa. Dacă profesorul vrea să dezvolte la elevii săi operaţiile intelectuale corespunzătoare întrebărilor şi recomandărilor din lista noastră, el le va pune elevilor aceste întrebări şi le va face aceste recomandări ori de cîte ori i se prezintă ocazia într-un mod natural. Mai mult, cînd profesorul rezolvă o problemă în faţa clasei, el trebuie să-şi regizeze puţin ideile şi să-şi pună singur aceleaşi întrebări pe care le foloseşte cînd îi ajută pe elevi. Călăuzit astfel, elevul va descoperi eventual folosirea corectă a acestor întrebări şi recomandări, dobîndind prin aceasta ceva mai valoros decît cunoaşterea unor fapte matematice particulare.

DIVIZIUNI PRINCIPALE, ÎNTREBĂRI PRINCIPALE

6. Cele patru faze. În timp ce încercăm să găsim soluţia, ne putem schimba de repetate ori punctul de vedere, modul în care privim problema. Trebuie să ne modificăm poziţia mereu. Concepţia noastră asupra problemei este la început, după toate probabilităţile, mai curînd incompletă; modul nostru de a o vedea se schimbă după ce am făcut oarecare progrese; el diferă iarăşi cînd sîntem aproape de a fi obţinut soluţia.

Pentru a grupa în mod convenabil întrebările și recomandările din lista noastră, trebuie să distingem patru faze ale muncii. Întîi, trebuie *să înțelegem* problema; trebuie să ne dăm limpede seama ce anume se cere. Al doilea, trebuie să vedem cum sînt legate între ele diversele elemente, care este relația dintre necunoscută și datele problemei, pentru a ne face o idee asupra soluției, pentru a întocmi un *plan*. Al treilea, ne *realizăm* planul. Al patrulea, *privim retrospectiv* soluția obținută, o revedem și o discutăm.

Fiecare dintre aceste faze își are importanța sa. Se poate întîmpla ca un elev să aibă o străfulgerare, să sară toți pașii pregătitori și să dea direct soluția. Firește, astfel de idei fericite sînt de dorit, dar se poate întîmpla ceva cu totul indezirabil și neplăcut dacă elevul sare vreuna dintre cele patru faze, în cazul cînd nu are o idee bună. Cel mai rău este cînd elevul se apucă să calculeze sau să construiască fără *a fi înțeles* problema. În general, este nefolositor să clarificăm amănunte înainte de a ne da seama de legătura principală sau înainte de a fi întocmit un fel de *plan*. Numeroase greșeli pot fi evitate dacă, în cadrul realizării planului său, elevul *își verifică fiecare pas*. Unele dintre cele mai bune efecte ale problemei se pot pierde dacă elevul omite să reexamineze și *să reconsidere* soluția completă.

7. Înțelegerea problemei. Este o prostie să răspundem la o întrebare pe care nu o înțelegem. Este neplăcut să lucrăm în vederea unui scop pe care nu-l dorim. Astfel de lucruri prostești și neplăcute se întîmplă adesea, în școală și în afara ei, însă profesorul ar trebui să se străduiască pentru a preîntîmpina producerea lor în clasă. Elevul trebuie să înțeleagă problema. Dar nu este de ajuns numai să o înțeleagă, el trebuie să fie și animat de dorința de a o rezolva. Dacă elevului îi lipsește înțelegerea sau interesul, vina nu este totdeauna a lui; problema trebuie să fie bine aleasă, nici prea grea și nici prea ușoară, naturală și atractivă, iar un anumit timp trebuie consacrat expunerii ei firești și interesante.

În primul rînd, trebuie înțeles enunțul verbal al problemei, formularea ei în cuvinte. Profesorul poate verifica aceasta pînă la un anumit punct; el îi cere elevului să repete enunțul și acesta trebuie să fie capabil de a o face într-un mod curgător. De asemenea, elevul trebuie să fie capabil de a pune în evidență părțile principale ale problemei, necu-

noscuta, datele, condiția. Așadar, profesorul poate numai rareori să se dispenseze de întrebările: *Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?*

Elevul trebuie să examineze atent, de mai multe ori și sub diverse aspecte părțile principale ale problemei. Dacă problema este legată de o figură, aceasta trebuie *desenată* și să se arate pe ea necunoscuta și datele. Dacă trebuie alese denumiri pentru aceste obiecte, el ar trebui să introducă notații *corespunzătoare*; dînd atenție alegerii adecvate a simbolurilor, el are obligația de a examina obiectele pentru care urmează să aleagă simbolurile. Mai există o altă întrebare, care poate fi utilă în acest stadiu pregătitor, cu condiția să nu ne așteptăm la un răspuns definitiv, ci doar la unul provizoriu, pe care elevul îl intuiește, îl ghicește: *poate fi satisfăcută condiția?*

(În dezvoltarea părții a II-a, la p. 47, paragraful „Înțelegerea problemei" este subîmpărțit în două etape: „Familiarizarea cu problema" și „Munca pentru o mai bună înțelegere".)

8. Exemplu. Să ilustrăm unele dintre tezele expuse pînă acum. Vom lua următoarea problemă simplă: *Să se afle diagonala unui paralelipiped dreptunghic, la care cunoaștem lungimea, lățimea și înălțimea.*

Pentru a discuta cu folos această problemă, elevii trebuie să fie familiarizați cu teorema lui Pitagora și cu unele dintre aplicațiile ei în geometria plană, dar ei pot să aibă foarte puține cunoștințe sistematice în domeniul geometriei în spațiu. Aici, profesorul se poate sprijini pe cunoașterea relațiilor spațiale, pe care elevul o are din viața de toate zilele.

Profesorul poate face problema interesantă, concretizînd-o. Clasa este un paralelipiped dreptunghic, ale cărui dimensiuni pot fi măsurate sau evaluate cu aproximație; elevii trebuie să găsească, „să măsoare indirect" diagonala clasei. Profesorul arată care sînt lungimea, lățimea și înălțimea clasei, indică printr-un gest diagonala și dă viață figurii desenate pe tablă prin referiri repetate la clasă.

Dialogul dintre profesor și elev poate să înceapă astfel:

„Care este necunoscuta?"
„Lungimea diagonalei unui paralelipiped".
„Care sînt datele?"
„Lungimea, lățimea și înălțimea paralelipipedului".

„*Alege notații potrivite.* Cu ce literă ar trebui notată necunoscuta?"

„x".

„Ce litere vei alege pentru lungime, lățime și înălțime?

„a, b, c".

„*Care este condiția* care leagă între ele a, b, c, și x?"

„x este diagonala paralelipipedului avînd lungimea, lățimea și înălțimea egale respectiv cu a, b și c".

„Are problema sens? Vreau să spun: *Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta*?"

„Da, este suficientă. Din moment ce cunoaștem a, b, c, cunoaștem paralelipipedul. Paralelipipedul fiind determinat, diagonala este determinată".

9. Întocmirea unui plan. Avem un plan, dacă știm, cel puțin în linii mari, ce calcule sau construcții trebuie efectuate pentru a obține necunoscuta. Drumul de la înțelegerea problemei pînă la conceperea unui plan poate fi lung și sinuos. În adevăr, pasul principal pentru a obține soluția unei probleme constă în a elabora ideea unui plan. Este posibil ca această idee să se cristalizeze doar treptat. Sau, după încercări în aparență neîncununate de succes și după o perioadă de ezitări, ea poate să apară dintr-o dată, ca o scînteie, ca o „idee strălucită". Lucrul cel mai bun pe care profesorul îl poate face pentru elev este de a-l ajuta într-un mod discret să ajungă la o astfel de idee strălucită. Întrebările și recomandările pe care le vom discuta acum tind să ducă la o astfel de idee.

Pentru a fi capabil să înțeleagă situația în care se află elevul, profesorul trebuie să se gîndească la propria sa experiență, la dificultățile și la succesele pe care le-a înregistrat rezolvînd probleme.

Firește, știm că este greu să ne vină o idee bună dacă avem cunoștințe insuficiente asupra subiectului și că este imposibil să ajungem la o astfel de idee dacă nu avem de loc cunoștințe. Ideile bune se întemeiază pe experiența dint trecut și pe cunoștințele dobîndite anterior. Simpla reamintire nu este suficientă pentru o idee bună, dar nu putem avea o idee bună dacă nu ne împrospătăm anumite fapte corespunzătoare; materialele singure nu sînt suficiente pentru a clădi o casă, dar nu putem clădi o casă dacă nu am strîns materialele necesare. Materialele necesare pentru a rezolva o problemă de matematică sînt anumite elemente importante

din cunoștințele de matematică dobîndite anterior, ca probleme rezolvate în trecut sau teoreme demonstrate în trecut. De aceea, este de multe ori cazul să începem cu întrebarea: *Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

Dificultatea constă în faptul că, de obicei, există prea multe probleme înrudite în vreun fel cu problema noastră actuală, adică avînd cu ea anumite puncte comune. Cum putem alege punctul sau cele cîteva puncte care ne sînt într-adevăr de folos? Există o recomandare care indică un punct comun esențial: *Să cercetăm necunoscuta! Și să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară.*

Dacă am reușit să ne reamintim de o problemă rezolvată anterior și care este foarte apropiată de problema noastră prezentă, înseamnă că am avut noroc. Este cazul să facem ceva pentru a merita acest noroc; îl putem merita, exploatînd vechea problemă. *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Am putea să o folosim?*

Bine înțelese și analizate cu seriozitate, întrebările de mai sus ajută de cele mai multe ori la declanșarea unei desfășurări corecte a ideilor, dar ele nu pot să ajute totdeauna, nu pot avea o acțiune magică. Dacă ele nu au efect, trebuie să căutăm un alt punct de contact adecvat și să explorăm diversele aspecte ale problemei noastre; trebuie să variem problema, să o transformăm, să o modificăm. Se poate reformula problema? Unele întrebări din listă noastră furnizează mijloace specifice pentru a varia problema, cum sînt generalizarea, particularizarea, folosirea unei analogii, suprimarea unei părți din condiție etc.; detaliile sînt importante, dar nu putem insista acum asupra lor. Modificarea problemei poate conduce la o problemă auxiliară adecvată: *Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită.*

Încercînd să aplicăm diferite probleme sau teoreme cunoscute, considerînd diverse modificări, experimentînd cu diferite probleme auxiliare, ne putem îndepărta atît de mult de problema noastră, încît apare pericolul de a o pierde cu totul din vedere. Există însă o întrebare potrivită pentru a ne întoarce la ea: *Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiție?*

10. Exemplu. Să revenim la exemplul de la pct. **8.** În momentul cînd l-am părăsit, elevii tocmai izbutiseră să înțe-

leagă problema și să arate pentru ea un anumit interes. Acum este posibil să le fi venit oarecare idei proprii, să manifeste oarecare inițiativă. Dacă profesorul, după ce-i privește cu atenție, nu poate descoperi nici un simptom al unei astfel de inițiative, el trebuie să rezume cu grijă dialogul anterior cu elevii. El trebuie să fie pregătit să repete cu anumite modificări întrebările la care elevii nu știu să răspundă. El trebuie să fie pregătit să se lovească adesea de tăcerea dezorientată a elevilor (pe care o vom marca prin puncte...).

Cunoști vreo problemă înrudită?"

...

„*Cercetează necunoscuta*! *Cunoști vreo problemă cu aceeași necunoscută?*"

.....

„Bine, *care este necunoscuta?*"

„Diagonala unui paralelipiped"

„Cunoști vreo *problemă cu aceeași necunoscută?*"

„Nu. Pînă acum nu am avut nici o problemă cu diagonala unui paralelipiped".

„Cunoști vreo *problemă cu o necunoscută asemănătoare?*

...

„Diagonala este un segment, un segment de dreaptă, nu-i așa? N-ai rezolvat nici o problemă în care necunoscuta era lungimea unui segment?"

„Desigur, am rezolvat astfel de probleme. De exemplu, să găsim o latură într-un triunghi dreptunghic".

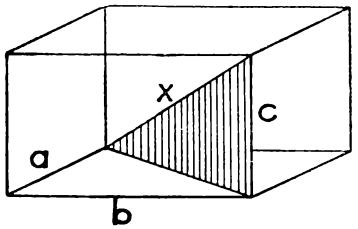

Fig. 1

„Foarte bine! *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Ai putea să o folosești?*

...

„Ai reușit să-ți amintești de o problemă înrudită cu cea pe care o ai acum și pe care ai rezolvat-o anterior. Nu ai

vrea să o utilizezi? *Nu ai putea introduce vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*"

...

„Bagă de seamă, problema de care ți-ai reamintit se ocupă de un triunghi. Ai vreun triunghi în figură?"

Să sperăm că această din urmă indicație a fost destul de explicită pentru a trezi la viață ideea rezolvării care constă în a introduce un triunghi dreptunghic (cel hașurat în fig. 1), și avînd ca ipotenuză diagonala căutată. Dar profesorul trebuie să fie pregătit și pentru cazul în care chiar această indicație atît de explicită este insuficientă pentru a-i urni pe elevi din punctul mort; de aceea, el trebuie să fie pregătit să folosească o gamă întreagă de indicații din ce în ce mai explicite.

„Ai fi mulțumit dacă ai avea un triunghi în figură?"

„Ce fel de triunghi ți-ar plăcea să ai în figură?"

„Deocamdată nu știi să găsești diagonala; dar spuneai că poți să afli latura unui triunghi. Ce ai de gînd acum?"

„Ai putea găsi diagonala dacă ea ar fi o latură într-un triunghi?"

Cînd, ajutați mai mult sau mai puțin, elevii izbutesc să introducă elementul auxiliar hotărîtor, triunghiul dreptunghic hașurat în fig. 1, profesorul trebuie să se convingă că elevii își dau seama acum cu destulă claritate ce au de făcut; abia pe urmă el îi poate încuraja să treacă la calcule.

„Cred că a fost o idee bună să desenezi acest triunghi. Acum ai triunghiul; ai oare și necunoscuta?"

„Necunoscuta este ipotenuza triunghiului; o putem calcula cu ajutorul teoremei lui Pitagora".

„Da, dacă cele două catete sînt cunoscute; dar le cunoști oare?"

„O catetă este dată: *c*. Cred că cealaltă nu este greu de aflat. Da, în adevăr, cealaltă catetă este ipotenuza unui alt triunghi dreptunghic".

„Foarte bine! Acum văd că ai un plan".

11. Realizarea planului. Nu este ușor de a concepe un plan, de a elabora ideea soluției. Pentru aceasta este nevoie de foarte mult: cunoștințe dobîndite anterior, o deprindere bună în munca intelectuală, concentrare asupra scopului și, în plus, noroc. Realizarea planului este mult mai ușoară; aici se cere în primul rînd răbdare.

Planul ne dă o linie generală de conduită; trebuie să ne convingem că detaliile se potrivesc cu această linie gene-

rală și de aceea trebuie să examinăm detaliile unul după altul, cu răbdare, pînă cînd totul devine perfect clar, pînă nu mai rămîne nici un ungher obscur în care s-ar putea ascunde vreo greșeală.

Dacă elevul a conceput într-adevăr un plan, profesorul dispune de un răgaz relativ. Primejdia principală este ca elevul să-și uite planul. Aceasta se poate întîmpla cu ușurință dacă elevul a primit planul de la altul, dacă-l acceptă, bazîndu-se pe autoritatea profesorului; dar dacă a lucrat el însuși, chiar ajutat, și dacă a conceput cu satisfacție ideea finală, el nu o va pierde ușor. Totuși profesorul trebuie să insiste ca elevul *să-și verifice fiecare pas.*

Ne putem convinge de corectitudinea unui pas din raționamentul nostru fie „intuitiv", fie „formal". Ne putem concentra asupra punctului respectiv, pînă ne dăm seama clar și distinct că nu mai încape nici o îndoială asupra corectitudinii pasului; pe de altă parte, putem deduce acest punct în conformitate cu anumite reguli formale. (Deosebirea dintre „intuiție" și „demonstrația formală" este suficient de clară în multe cazuri importante; discutarea mai amănunțită a acestei chestiuni o putem lăsa pe seama filozofilor.)

Principalul este ca elevul să fie convins cu adevărat de corectitudinea fiecărui pas. În anumite cazuri, profesorul poate să accentueze deosebirea dintre „a vedea" și „a demonstra": *Vă puteți da limpede seama că pasul este corect?* Dar puteți oare să și *demonstrați că pasul este corect?*

12. Exemplu. Să rezumăm munca la problema noastră pînă în momentul în care am părăsit-o la sfîrșitul pct. **10.** Pînă la urmă, elevului i-a venit ideea soluției. El distinge triunghiul dreptunghic în care necunoscuta x este ipotenuza, iar înălțimea c (cunoscută) este una dintre catete; cealaltă catetă este diagonala unei fețe. Elevul trebuie îndemnat, eventual, să introducă o notație adecvată. El trebuie să noteze cu y această a doua catetă, care este diagonala feței cu laturile a și b. Astfel, el poate vedea mai clar ideea soluției, care constă în introducerea unei probleme auxiliare unde necunoscuta este y. În cele din urmă, considerînd un nou triunghi dreptunghic, el poate obține (vezi fig. 1)

$$x^2 = y^2 + c^2$$
$$y^2 = a^2 + b^2$$

și apoi, eliminînd necunoscuta auxiliară y,

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Profesorul nu are motive să-l întrerupă pe elev dacă el efectuează în mod corect aceste detalii, eventual, cu excepția sfatului de a *verifica fiecare pas.* Astfel, profesorul poate întreba:

„Îți poți da limpede seama că triunghiul cu laturile x, y, c este dreptunghic?"

La această întrebare, elevul poate răspunde cinstit „Da", încurcîndu-se totuși, dacă profesorul, nesatisfăcut numai cu convingerea intuitivă a elevului, continuă să întrebe:

„Dar ai putea *demonstra* că acest triunghi este dreptunghic?"

De aceea, este mai bine ca profesorul să renunțe la această întrebare cît timp clasa nu a dobîndit cunoștințe solide de geometrie în spațiu. Chiar în acest din urmă caz există pericolul ca răspunsul la o întrebare secundară să devină principala dificultate pentru majoritatea elevilor.

13. Privire retrospectivă. Chiar elevii foarte buni, după ce au obținut soluția problemei și au transcris-o pe curat, își închid caietul și caută să se ocupe de altceva. Procedînd astfel, ei trec peste o fază importantă și instructivă a muncii. Aruncînd o privire retrospectivă asupra soluției complete, reconsiderînd și reexaminînd rezultatul și calea care a dus la el, ei pot să-și consolideze cunoștințele și să-și dezvolte aptitudinile de a rezolva probleme. Un profesor bun trebuie să înțeleagă și să le arate și elevilor că nici o problemă nu poate fi epuizată. Întotdeauna mai rămîne cîte ceva de făcut; cu suficientă muncă și pătrundere, putem îmbunătăți orice soluție și, cel puțin, putem totdeauna să ajungem la o înțelegere mai bună a ei.

În momentul de față, elevul și-a realizat planul. El și-a scris soluția, verificîndu-se pas cu pas. De aceea, el ar trebui să aibă motive suficiente pentru a crede că soluția sa este corectă. Cu toate acestea, erorile sînt oricînd posibile, mai ales dacă deducția este lungă și complicată. De aceea, verificările sînt de dorit. Mai cu seamă cînd dispunem de un procedeu rapid și intuitiv pentru a verifica fie rezultatul, fie calea pe care s-a ajuns la el, acest procedeu nu trebuie pierdut din

vedere. *Se poate verifica rezultatul? Putem verifica argumentarea?*

Pentru a ne convinge de prezența unui obiect sau de faptul că el posedă o anumită calitate, obișnuim să-l privim și să-l atingem. Și după cum preferăm să percepem prin intermediul a două organe de simț diferite, tot astfel preferăm să ne convingem prin două probe diferite: *S-ar putea obține rezultatul pe altă cale?* Natural, preferăm o cale scurtă și intuitivă uneia lungi și greoaie: *Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire?*

Una dintre cele dintîi și mai importante datorii ale profesorului constă în a nu da elevului impresia că problemele matematice ar avea prea puține legături unele cu altele și că nu ar avea de loc legături cu altceva. Avem o posibilitate firească de a cerceta conexiunile unei probleme, atunci cînd privim retrospectiv soluția ei. Elevii vor găsi această privire retrospectivă asupra soluției într-adevăr interesantă, dacă au depus un efort serios și dacă au conștiința că au lucrat bine. În acest caz, ei sînt dornici să vadă ce ar mai putea înfăptui prin efortul lor și cum ar putea lucra la fel de bine altă dată. Profesorul trebuie să-i încurajeze pe elevi ca aceștia să imagineze cazuri în care ar putea utiliza din nou procedeul folosit acum sau aplica rezultatul obținut. *Putem folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?*

14. Exemplu. La pct. **12**, elevii au găsit, pînă la urmă, soluția: dacă cele trei muchii ale unui paralelipiped dreptunghic care pornesc din același vîrf sînt a, b, c, atunci diagonala este

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Se poate verifica rezultatul? Profesorul nu se poate aștepta la un răspuns bun din partea unor elevi lipsiți de experiență. Dar elevii trebuie să se convingă foarte curînd din propria lor experiență că problemele „cu litere" prezintă un mare avantaj față de cele pur numerice; dacă problema este dată „în litere", rezultatul ei se pretează la o serie de verificări de care o problemă „cu numere" nu este de loc susceptibilă. Exemplul nostru, deși foarte simplu, este suficient pentru a dovedi aceasta. Profesorul poate pune mai multe întrebări despre rezultat, la care elevii să răspundă ușor prin „Da", în schimb, un singur răspuns „Nu" ar pune în evidență o lipsă serioasă a rezultatului nostru.

„*Au fost utilizate toate datele?* Apar toate datele, adică a, b, c, în formula obținută pentru diagonală?"

„Lungimea, lățimea și înălțimea joacă același rol în problema noastră; ea este simetrică în raport cu a, b, c. Este oare expresia pe care ați obținut-o pentru diagonală simetrică față de a, b, c? Rămîne ea neschimbată dacă schimbați între ele a, b, c?"

„Problema noastră este o problemă de geometrie în spațiu: să se afle diagonala unui paralelipiped de dimensiuni a, b, c date. Problema amintită este analogă cu una de geometrie plană: să se afle diagonala unui dreptunghi de dimensiuni a, b, date. Este rezultatul problemei noastre «în spațiu» analog cu rezultatul problemei «plane»?

„Dacă înălțimea c descrește și dispare pînă la urmă, paralelipipedul se transformă într-un paralelogram. Dacă punem $c = 0$ în formula obținută, vom căpăta formula corectă pentru diagonala unui paralelogram dreptunghic?"

„Dacă înălțimea c crește, diagonala crește și ea. Reiese oare aceasta din formula obținută?"

„Dacă toate cele trei dimensiuni a, b, c ale paralelipipedului cresc în aceeași proporție, diagonala crește și ea în aceeași proporție. Dacă în formula obținută vom substitui pentru a, b, c, respectiv $12a$, $12b$, $12c$, expresia diagonalei corespunzătoare acestei substituții trebuie și ea să fie înmulțită cu 12. Așa este?"

„Dacă a, b, c sînt măsurate în metri, formula dă diagonala, tot în metri; dacă însă toate măsurile sînt în centimetri, formula trebuie să rămînă corectă. Așa este?"

(Ultimele două întrebări sînt, în esență, echivalente; vezi *Verificarea cu ajutorul dimensiunii.*)

Aceste întrebări dau de multe ori rezultate bune. În primul rînd, un elev inteligent nu poate să nu fie impresionat de faptul că formula face față cu succes unui număr atît de mare de încercări. Înainte, el era convins că formula este corectă, deoarece o dedusese cu grijă. Acum, convingerea sa a sporit și această creștere a încrederii sale provine dintr-un izvor diferit: ea se datorește unui fel de „probă experimentală". Apoi, mulțumită întrebărilor de mai sus, detaliile formulei capătă o nouă semnificație și sînt confruntate cu fapte variate. De aceea, formula are șanse mai mari de a fi memorată, cunoștințele elevului sînt întărite. În sfîrșit, aceste întrebări pot fi transferate cu ușurință la probleme similare. După o oarecare experiență în rezolvarea unor probleme asemănătoare,

un elev inteligent poate ajunge să sesizeze ideea generală care stă la baza ei: utilizarea tuturor datelor importante, modificarea datelor, simetrie, analogie. Dacă el capătă obișnuința de a-și îndrepta atenția spre astfel de puncte, aptitudinile sale de a rezolva probleme vor înregistra un progres esențial.

Putem verifica argumentarea? Reverificarea pas cu pas a căii prin care s-a ajuns la soluție poate fi necesară în cazuri dificile și importante. De regulă, este suficient de a alege pentru verificare punctele „nevralgice". În cazul nostru, ar fi recomandabil să discutăm retrospectiv întrebarea la care sfătuiam să se renunțe cît timp soluția nu fusese obținută: Se poate *demonstra* că triunghiul cu laturile x, y, c este dreptunghic? (Vezi sfîrșitul pct. **12**).

Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă? Cu o ușoară încurajare și după unul sau două exemple, elevii găsesc fără greutate aplicații constînd mai ales în a da o *interpretare concretă* elementelor matematice abstracte ale problemei. Profesorul recursese și el la o astfel de interpretare concretă, considerînd sala în care avea loc discuția drept paralelipipedul din problemă. Un elev mai puțin inteligent ar putea propune ca aplicație să se calculeze diagonala cofetăriei din apropiere în locul diagonalei clasei. Dacă elevii nu reușesc singuri să dea dovadă de mai multă imaginație, profesorul poate propune o problemă întrucîtva diferită, de exemplu: „Se dau lungimea, lățimea și înălțimea unui paralelipiped dreptunghic; să se afle distanța de la centru la unul dintre colțuri".

Elevii pot folosi *rezultatul* problemei pe care tocmai au rezolvat-o, remarcînd că distanța cerută reprezintă jumătate din diagonala pe care au calculat-o. De asemenea, ei pot folosi *metoda*, introducînd triunghiuri dreptunghice adecvate (această din urmă alternativă este mai puțin evidentă și ceva mai greoaie în cazul nostru).

După această aplicație, profesorul poate vorbi despre poziția celor patru diagonale ale paralelipipedului și despre cele șase piramide avînd ca baze cele șase fețe și centrul ca vîrf comun, iar semidiagonalele ca muchii laterale. După ce a trezit suficient imaginația geometrică a elevilor, profesorul trebuie să revină la întrebarea sa: *Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?* Acum sînt mai multe șanse ca elevii să găsească o interpretare concretă mai interesantă, bunăoară următoarea:

„În centrul unui acoperiș plan dreptunghiular, lung de 21 m și lat de 16 m, trebuie ridicată o prăjină înaltă de 8 m. Pentru a o fixa avem nevoie de patru cabluri egale. Cablurile pornesc din același punct al prăjinii, situat la 2 m sub extremitatea ei, și sînt legate de cele patru colțuri ale acoperișului. Cît de lung va fi fiecare cablu?"

Elevii pot folosi *metoda* problemei pe care au rezolvat-o amănunțit, introducînd un triunghi dreptunghic într-un plan vertical și altul într-un plan orizontal. Sau ei pot folosi *rezultatul*, închipuindu-și un paralelipiped dreptunghic avînd ca diagonală x unul dintre cele patru cabluri, iar ca muchii

$$a = 10{,}5; \qquad b = 8; \qquad c = 6.$$

Aplicarea directă a formulei dă $x = 14{,}5$.

Alte exemple vezi la *Se poate folosi rezultatul?*

15. Căi de acces diferite. Să mai rămînem, un timp, la problema pe care am considerat-o la punctele **8**, **10**, **12**, **14**. Partea principală a rezolvării, descoperirea planului, a fost descrisă la pct. **10**. Menționăm că profesorul ar fi putut proceda în alt mod. Plecînd de la aceleași date ca la pct. **10**, el ar fi putut urma un drum întrucîtva diferit, punînd următoarele întrebări:

„Cunoști vreo problemă înrudită?"

„Cunoști vreo problemă *analogă*?"

„Vezi, avem de-a face cu o problemă de geometrie în spațiu. Ai putea să te gîndești la vreo problemă analogă mai simplă din geometria plană?"

„Vedeți, problema noastră se referă la o figură în spațiu, este vorba în ea despre diagonala unui paralelipiped dreptunghic. Ce problemă analogă am putea avea despre o figură în plan? Ea ar trebui să se refere la... diagonala unui ..."

„Unui paralelogram dreptunghic, a unui dreptunghi".

Elevii, chiar dacă sînt foarte leneți și nepăsători și au fost înainte incapabili să ghicească ceva, sînt constrînși, pînă la urmă, să contribuie, fie chiar într-o măsură modestă, la ideea soluției. În afară de aceasta, dacă elevii sînt atît de leneți, profesorul nu trebuie să abordeze problema paralelipipedului fără să-i fi pregătit în prealabil, discutînd cu ei problema analogă a dreptunghiului. El poate continua apoi după cum urmează:

„Iată o problemă înrudită cu a noastră şi rezolvată anterior. Ai putea să o foloseşti?"

„Nu ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?"

Este posibil ca profesorul să reuşească să le sugereze elevilor ideea pe care o vrea. Aceasta constă în a concepe diagonala paralelipipedului dat ca diagonală a unui dreptunghi convenabil, care trebuie introdus în figură (ca intersecţie a paralelipipedului cu un plan care trece prin două muchii opuse). Ideea este în esenţă aceeaşi ca şi înainte (pct. **10**), însă calea urmată este alta. La pct. **10**, contactul cu cunoştinţele elevilor s-a stabilit prin intermediul necunoscutei; o problemă rezolvată anterior a fost reluată, deoarece necunoscuta ei era aceeaşi cu cea din problema noastră. În punctul de faţă, ideea soluţiei a fost găsită cu ajutorul unei analogii.

16. Metoda profesorului de a pune întrebări, prezentată la punctele **8**, **10**, **12**, **14**, **15**, este în esenţă următoarea: se începe cu o întrebare generală sau cu o recomandare generală din lista noastră şi, dacă este cazul, se coboară treptat la întrebări şi la recomandări mai particulare şi mai concrete pînă se ajunge la o întrebare care face să apară un răspuns în mintea elevului. Dacă elevul trebuie ajutat să-şi exploateze ideea, se pleacă din nou, dacă este posibil, de la o întrebare sau de la o recomandare generală din listă şi se revine iarăşi la una mai specială, dacă este nevoie; şi aşa mai departe.

Natural, lista noastră nu este decît o primă listă de acest gen; ea pare să fie suficientă pentru majoritatea cazurilor simple, dar este în afară de orice îndoială că ea ar putea fi perfecţionată. Este însă important ca recomandările de la care pornim să fie simple, naturale şi generale, iar lista lor să fie scurtă[1].

Recomandările trebuie să fie simple şi naturale, deoarece, altfel, ele nu pot fi *discrete*.

Recomandările trebuie să fie generale, aplicabile nu numai problemei actuale, ci unor probleme de orice fel, dacă ele sînt menite să dezvolte aptitudinile elevului şi nu doar o tehnică specială.

[1] În lumina celor de mai sus, ar fi utilă pentru cititor să cunoască varianta prescurtată a listei lui G. Pólya (p.12), care poate fi utilizată ca afiş didactic. Ea a fost reprodusă din *L'Enseignement mathematique*, vol. XXX, nr. 4—5—6. — *N.T.*

Lista trebuie să fie scurtă pentru ca întrebările să poată fi repetate frecvent, într-un mod neartificial şi în circumstanţe variate; astfel, există posibilitatea ca ele să fie însuşite de elevi şi să contribuie la dezvoltarea unei *obişnuinţe intelectuale*.

Este necesar să se treacă treptat spre recomandări speciale, pentru ca elevului să-i revină o cît mai mare *parte din muncă*.

Această metodă de a pune întrebări nu este rigidă; şi este bine aşa, deoarece, în această materie, orice procedeu rigid, mecanic, pedant nu poate fi decît dăunător. Metoda noastră admite o anumită elasticitate şi variaţie, ea admite diferite căi de acces (pct. **15**), ea poate fi şi trebuie aplicată în aşa fel, încît întrebările pe care le pune profesorul *să-i fi putut veni în minte şi elevului însuşi*.

Dacă vreun cititor va dori să încerce în clasa sa metoda pe care o propunem aici, el va trebui, bineînţeles, să acţioneze cu precauţie. El va trebui să studieze cu grijă exemplul introdus la pct. **8** şi exemplele următoare de la punctele **18**, **19**, **20**. El va trebui să prepare cu grijă exemplele pe care intenţionează să le discute, luînd în considerare diferite căi de acces. El trebuie să înceapă cu cîteva sondaje şi să descopere treptat cum poate ajunge să stăpînească metoda, ce atitudine au faţă de ea elevii şi cît timp necesită.

17. Întrebări bune şi întrebări proaste. Dacă metoda de a pune întrebări, prezentată în punctul precedent, este înţeleasă corect, ea ajută la compararea calităţii diverselor recomandări care se pot face elevilor cu scopul de a-i ajuta.

Să revenim la situaţia pe care o aveam la începutul pct. **10**, cînd a fost pusă întrebarea: *Cunoaşteţi vreo problemă înrudită?* În locul acesteia, cu cea mai bună intenţie de a-i ajuta pe elevi, se poate pune întrebarea: *Aţi putea aplica aici teorema lui Pitagora?*

Intenţia putea fi lăudabilă, dar întrebarea este cît se poate de nepotrivită. Trebuie să ne dăm seama în ce situaţie a fost pusă; vom înţelege atunci că există un lung şir de obiecţii împotriva unui astfel de „ajutor".

(1) Dacă elevul este aproape de soluţie, el va înţelege recomandarea cuprinsă în întrebare; dacă nu este aproape de rezolvare, este foarte posibil ca să nu-şi dea seama spre ce anume ţinteşte întrebarea. Astfel, întrebarea nu-i este de nici un ajutor tocmai acolo unde nevoia de ajutor este mai mare.

(2) Dacă recomandarea a fost înțeleasă, ea dezvăluie secretul în întregime, și elevului nu-i mai rămîne aproape nimic de făcut.

(3) Recomandarea este de natură prea particulară. Chiar dacă elevul o poate utiliza la rezolvarea problemei respective, el nu învață astfel nimic pentru o problemă viitoare. Întrebarea nu este instructivă.

(4) Chiar dacă a înțeles recomandarea, elevul va izbuti cu greu să-și dea seama cum a ajuns profesorul la ideea de a pune o astfel de întrebare. Și cum ar fi putut el, elevul, să ajungă singur la această întrebare? Ea apare ca o surpriză nefirească, ca un iepure scos de scamator dintr-un joben; întrebarea este într-adevăr neinstructivă.

Nici una dintre aceste obiecții nu poate fi ridicată împotriva procedeului descris la pct. **10** sau împotriva celui de la pct. **15.**

ALTE EXEMPLE

18. O problemă de construcție. *Să se înscrie un pătrat într-un triunghi dat, astfel încît două vîrfuri ale pătratului să fie situate pe baza triunghiului, iar celelalte două pe cîte o latură a triunghiului.*

„*Care este necunoscuta*?"

„Un pătrat".

„*Ce este dat*?"

„Un triunghi, și nimic mai mult".

„*Care este condiția*?"

„Cele patru vîrfuri ale pătratului trebuie să fie pe perimetrul triunghiului, două pe bază și cîte unul pe fiecare dintre cele două laturi".

„*Poate fi satisfăcută condiția*?"

„Cred că da, dar nu sînt sigur".

„Problema nu ți se pare prea ușoară. *Dacă nu poți să rezolvi problema propusă, încearcă să rezolvi mai întîi o problemă înrudită.* Ai putea satisface *o parte a condiției*?"

„Ce înseamnă «o parte a condiției?»

„Vezi, condiția se referă la toate vîrfurile pătratului. Cîte vîrfuri avem aici?"

„Patru".

„O parte a condiției ar putea să privească mai puțin decît patru vîrfuri. *Păstrează o parte a condiției, omițînd restul.* Ce parte a condiției este ușor de satisfăcut?"

„Este ușor de desenat un pătrat avînd două vîrfuri pe perimetrul triunghiului, ba chiar un pătrat avînd trei vîrfuri pe perimetru!"

„*Desenează o figură*!"

Elevul desenează fig. 2.

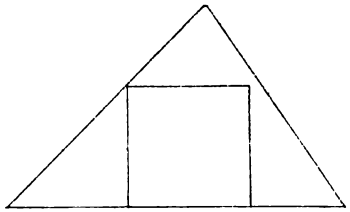

Fig. 2

„*Ai păstrat numai o parte a condiției, omițînd restul. În ce măsură este acum determinată necunoscuta?*"

„Pătratul nu este determinat, dacă numai trei dintre vîrfurile lui se află pe perimetrul triunghiului".

„Bine! Fă un desen".

Elevul desenează fig. 3.

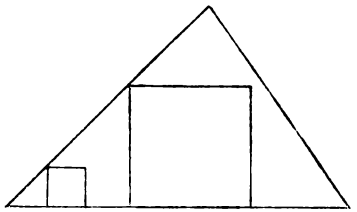

Fig. 3

„După cum ai spus, pătratul nu este determinat prin *partea din condiție pe care ai păstrat-o. Cum mai poate el să varieze*?"

...

„Trei vîrfuri ale pătratului nostru se află pe perimetrul triunghiului, pe cînd al patrulea vîrf nu este încă acolo unde ar trebui să fie. După cum ai spus, pătratul nostru este nede-

terminat, el poate să varieze; același lucru este adevărat și în privința celui de-al patrulea vîrf. *Cum mai poate el să varieze?*"

...

„Dacă vrei, încearcă să o faci experimental. Desenează mai multe pătrate avînd trei vîrfuri pe perimetru, la fel cu cele două pătrate din figură. Desenează pătrate mari și pătrate mici. Care pare să fie locul geometric al celui de-al patrulea vîrf? *Cum mai poate el să varieze?*"

Profesorul l-a adus pe elev foarte aproape de ideea soluției. Dacă elevul este capabil să ghicească că locul geometric al celui de-al patrulea vîrf este o dreaptă, el a prins această idee.

19. O problemă de demonstrat. *Două unghiuri sînt situate în plane diferite, dar laturile lor sînt paralele două cîte două și orientate în același sens. Să se demonstreze că unghiurile sînt egale.*

Ni se cere să demonstrăm o teoremă fundamentală a geometriei în spațiu. Problema poate fi pusă unor elevi familiarizați cu geometria plană și care cunosc cele cîteva fapte din geometria în spațiu care pregătesc această teoremă în *Elementele* lui Euclid. (Teorema de mai sus, pe care o vom demonstra acum, este propoziția 10 din cartea XI a lui Euclid). În acest punct sînt tipărite cu litere cursive nu numai întrebările și recomandările citate din lista noastră, ci și altele, care se află cu ele în aceeași relație ca cea dintre „problemele de demonstrat" și „problemele de aflat". (Această relație este tratată sistematic în „*P r o b l e m e d e a f l a t, p r o b l e m e d e d e m o n s t r a t*" 5, 6.)

„*Care este ipoteza?*"

„Două unghiuri sînt situate în plane diferite. Fiecare latură a unuia este paralelă cu latura corespunzătoare a celuilalt și are aceeași direcție".

„*Care este concluzia?*"

„Unghiurile sînt egale".

„*Desenează o figură. Introdu notații corespunzătoare*".

Elevul desenează dreptele din fig. 4 și, ajutat mai mult sau mai puțin de profesor, alege literele, așa cum se arată în această figură.

„*Care este ipoteza?* Spune-o, folosind notațiile noastre".

„A, B, C nu sînt situate în același plan cu A', B', C'. Avem $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. De asemenea, AB este orientată în același sens ca și $A'B'$, iar AC în același sens ca $A'C'$".

„*Care este concluzia?*"

„$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$".

„*Cercetează concluzia! Și gîndește-te la o teoremă cunoscută, avînd aceeași concluzie sau una similară*".

„Dacă două triunghiuri sînt egale, unghiurile lor omologe sînt egale".

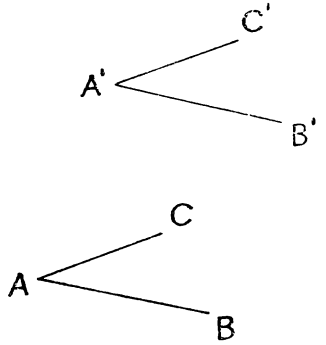

Fig. 4

„Foarte bine! *Avem aici o teoremă înrudită cu a noastră și demonstrată anterior. Ai putea să o folosești?*"

„Cred că da, însă nu-mi dau bine seama cum".

„*Ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*"

...

„Ei bine, teorema pe care ai amintit-o atît de frumos se ocupă de triunghiuri, de două triunghiuri egale. Ai vreun triunghi în figură?"

„Nu. Dar pot introduce. Unesc B cu C și B' cu C'. Obțin atunci două triunghiuri, ΔABC și $\Delta A'B'C'$".

„Așa. Dar la ce servesc aceste triunghiuri?"

„Pentru a demonstra concluzia $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$".

„Bine. Dacă vrei să demonstrezi aceasta, ce fel de triunghiuri îți trebuie?"

„Triunghiuri egale. Da, într-adevăr, pot alege B, C, B', C' în așa fel încît să am

$$AB = A'B',\ AC = A'C'$$".

„Foarte bine! Și acum, ce vrei să demonstrezi?"

„Vreau să demonstrez că triunghiurile sînt egale,

$$\Delta ABC = \Delta A'B'C'.$$

Dacă reușesc să demonstrez aceasta, concluzia $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ va rezulta imediat".

„Bravo! Ai acum un alt scop, scopul de a demonstra o nouă concluzie. *Cercetează concluzia! Și gîndește-te la o teo-*

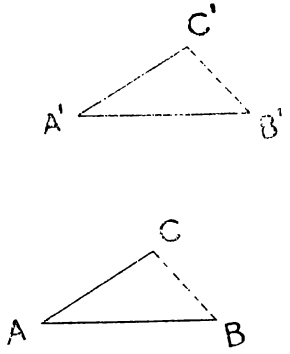

Fig. 5

remă cunoscută avînd aceeași concluzie sau una similară".

„Două triunghiuri sînt egale, dacă ... dacă cele trei laturi ale unuia sînt respectiv egale cu cele trei laturi ale celuilalt".

„Așa! O altă teoremă ar fi fost mai puțin potrivită aici. *Iată o teoremă înrudită cu a noastră și demonstrată anterior. Ai putea să o folosești?*"

„Aș putea să o folosesc dacă aș ști că $BC = B'C'$".

„Așa este! Și acum, ce vei urmări?"

„Să demonstrez că $BC = B'C'$".

„Gîndește-te la o teoremă cunoscută avînd aceeași concluzie sau una similară".

„Da, cunosc o teoremă care se termină cu cuvintele"... atunci, cele două segmente sînt egale". Dar nu se potrivește.

„Nu ai putea să introduci vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?"

...

„Cum ai putea demonstra că $BC = B'C'$, dacă în figură nu este nici o legătură între BC și $B'C'$".

...

„Ai folosit ipoteza? Care este ipoteza?"

„Presupunem că $AB \| A'B'$, $AC \| A'C'$. Da, firește, trebuie s-o folosesc".

„Ai folosit întreaga ipoteză? Spuneai că $AB \| A'B'$. Este tot ce știm despre aceste segmente?"

„Nu; AB este, în plus, egal cu $A'B'$, prin construcție. Segmentele acestea sînt paralele și egale. La fel sînt AC și $A'C'$".

„Două segmente paralele și de lungime egală formează o figură interesantă. *Ai întîlnit-o înainte?*"

„Bineînțeles! Sigur! Un paralelogram! Voi uni A cu A', B cu B' și C cu C'".

„Ideea nu este rea. Cîte paralelograme avem acum în figură?"

„Două. Ba nu, trei. Nu, două. Cred că sînt două despre care putem demonstra imediat că sînt paralelograme. Al treilea pare să fie un paralelogram; sper că pot demonstra aceasta. Și atunci, demonstrația este terminată!"

Am fi putut deduce și din răspunsurile precedente că elevul este inteligent. După această din urmă observație însă, concluzia noastră devine neîndoielnică.

Elevul acesta este capabil să intuiască un rezultat matematic și să deosebească limpede ceea ce demonstrează de ceea ce intuiește. El știe, de asemenea, că ceea ce intuiește poate fi mai mult sau mai puțin plauzibil, el a profitat de pe urma lecțiilor sale de matematică; el are o experiență reală în rezolvarea problemelor, este în stare să conceapă și să exploateze o idee bună.

20. O problemă de determinare a vitezei unui proces. *Într-un vas conic curge apă, cu viteza*[1] v. *Vasul are forma unui con circular drept, cu baza orizontală și cu vîrful în jos; raza bazei este* a, *iar înălțimea conului* b. *Să se afle viteza cu care se ridică nivelul apei atunci cînd înălțimea ei este egală cu* y. *Să se afle valoarea numerică a necunoscutei, considerînd că* $a = 4$ *m*, $b = 3$ *m*, $v = 2$ *m*^{3}*/min*, *iar* $y = 1$ *m*.

Se presupune că elevii cunosc regulile simple ale derivării și că sînt familiarizați cu noțiunea de „viteză de variație" a unei mărimi.

„Care sînt datele?"

[1] Este vorba aici de cantitatea de apă care curge în unitatea de timp. — *N.T.*

„Raza bazei conului este $a = 4$ m, iar înălțimea lui este $b = 3$ m; viteza cu care apa curge în vas este $v = 2$ m³/min, iar adîncimea apei la un moment dat este $y = 1$ m".

„Este corect. Enunțul problemei pare să ne spună că trebuie, deocamdată, să facem abstracție de valorile numerice, să lucrăm cu litere, exprimînd necunoscuta în funcție

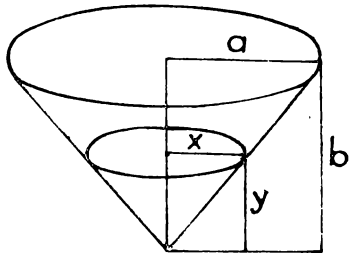

Fig. 6

de a, b, v, y, și abia pe urmă, după ce vom fi obținut această expresie a necunoscutei în litere, să substituim valorile numerice. Eu aș urma această sugestie. Și acum, *care este necunoscuta?*"

„Viteza cu care crește nivelul atunci cînd adîncimea apei este y".

„Ce înseamnă aceasta? Ai putea să o spui cu alte cuvinte?"

„Viteza cu care crește adîncimea apei".

„Ce înseamnă aceasta? *Ai putea s-o reformulezi oarecum altfel?*"

„Viteza cu care variază adîncimea apei".

„Asta este: viteza cu care variază y. Dar ce este viteza de variație? *Să revenim la definiție*".

„Viteza de variație a unei funcții este derivata ei".

„Foarte bine. Să vedem acum dacă y este o funcție. După cum am spus înainte, facem abstracție de valoarea numerică a lui y. Ne putem oare imagina că y variază?"

„Da, nivelul y al apei crește pe măsură ce trece timpul".

„Așadar, y este funcție de ce?"

„Funcție de timpul t".

„Bine. *Introdu notațiile corespunzătoare.* Cum ai scrie „viteza de variație a lui y" în simboluri matematice?"

„$\frac{dy}{dt}$"

„Așa. Prin urmare, aceasta este necunoscuta. Ea trebuie exprimată cu ajutorul lui a, b, v, y. De altfel, una dintre aceste date este o «viteză». Care anume?"

„v este viteza cu care apa pătrunde în vas".

„Ce înseamnă aceasta? S-ar putea spune și cu alte cuvinte?"

„v este viteza cu care variază volumul apei din vas".

„Ce înseamnă aceasta? *Ai putea s-o reformulezi oarecum altfel?* Cum ai scrie aceasta în *notații corespunzătoare?*"

„$v = \frac{dV}{dt}$".

„Ce reprezintă V?"

„Volumul apei din vas, la momentul t".

„Bine. Așadar, trebuie să exprimăm $\frac{dy}{dt}$ prin a, b, $\frac{dV}{dt}$, y. Cum procedăm?"

...

„Dacă nu știi să rezolvi această problemă, încearcă să *rezolvi mai întîi o problemă înrudită.* Dacă nu-ți dai seama încă de legătura dintre $\frac{dy}{dt}$ și datele problemei, caută să găsești o legătură mai simplă care să poată servi ca punct de sprijin".

...

„Nu-ți dai seama că există și alte relații? De exemplu, sînt oare y și V independente una de cealaltă?"

„Nu. Cînd y crește, V trebuie de asemenea să crească".

„Așadar, avem aici o legătură. Care anume?"

„Ei bine, V este volumul unui con a cărui înălțime este y. Dar nu cunosc încă raza bazei".

„Putem totuși să o luăm în considerare. Să-i dăm un nume, de exemplu x".

„$V = \frac{\pi x^2 y}{3}$".

„Este corect. Acum, să vedem ce știm despre x? Este x independent de y?"

„Nu, dacă nivelul y al apei crește, raza x a suprafeței libere crește și ea".

„Prin urmare, avem o legătură. Care este legătura?"

„Natural, niște triunghiuri asemenea.

$$x : y = a : b".$$

„Cum vezi, încă o legătură, pe care trebuie să o folosim. Nu uita că voiai să cunoști relația dintre V și y".

„Avem

$$x = \frac{ay}{b};$$

$$V = \frac{\pi a^2 y^2}{3 b^2}\text{“}.$$

„Foarte bine. Pare că sîntem pe drumul cel bun, nu-i așa? Dar nu trebuie să uităm ce anume urmărim. Care este necunoscuta?“

„Este $\frac{dy}{dt}$“.

„Trebuie să găsești legătura dintre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ și alte mărimi.

„Să derivăm! Bineînțeles!

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi a^2 y^2}{b^2} \frac{dy}{dt}.$$

Asta este“.

„Foarte bine! Și acum, ce-i cu valorile numerice?“

„Dacă $a = 4$, $b = 3$, $\frac{dV}{dt} = v = 2$, $y = 1$, atunci

$$2 = \frac{\pi \times 16 \times 1}{9} \frac{dy}{dt}\text{“}.$$

Partea a II-a

CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ?

Familiarizarea cu problema

De unde să încep? Începe cu enunțul problemei.

Ce pot să fac? Consideră problema în întregul ei, cît poți de clar și de real. Pentru moment, nu te ocupa de amănunte.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? Trebuie să înțelegi problema, să te familiarizezi cu ea, să-ți imprimi în minte țelul. Atenția acordată problemei va contribui, de asemenea, să-ți stimuleze memoria și să te pregătească pentru a-ți reaminti punctele relevante.

Munca pentru o mai bună înțelegere

De unde să încep? Pornește din nou de la enunțul problemei. Mergi înainte, abia cînd acest enunț îți este atît de clar și atît de bine imprimat în minte încît poți să nu te mai uiți la problemă pentru o clipă, fără teamă că ai să pierzi din vedere ansamblul.

Ce pot să fac? Izolează părțile principale ale problemei. Ipoteza și concluzia sînt părțile principale ale unei „probleme de demonstrat"; necunoscuta, datele și condițiile sînt părțile principale ale unei „probleme de aflat". Parcurge părțile principale ale problemei, examinează-le una cîte una, reexaminează-le, consideră-le în diverse combinații, legînd fiecare detaliu de celelalte detalii și fiecare dintre ele de ansamblul problemei.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? Îți vei pregăti și clarifica detalii care ar putea să joace un rol mai tîrziu.

În căutarea ideii utile

De unde să încep? Începe prin a considera părțile principale ale problemei. Mergi mai departe abia după ce aceste părți principale au fost ordonate distinct și înțelese clar,

datorită muncii pregătitoare, și atunci cînd memoria pare să funcționeze fidel.

Ce pot să fac? Consideră problema sub diverse aspecte și caută contacte cu ceea ce știi dinainte.

Consideră problema sub diverse aspecte. Accentuează diferitele părți, examinează diferitele detalii, reexaminează-le de mai multe ori pe căi diferite, combină detaliile în diferite moduri, abordează-le pe diferite căi. Încearcă să descoperi vreun nou înțeles în fiecare detaliu, vreo nouă interpretare a ansamblului problemei.

Caută legături cu ceea ce știi dinainte. Încearcă să te gîndești la ceea ce ți-a fost de folos în situații similare din trecut. Încearcă să recunoști cîte ceva familiar în ceea ce examinezi acum, caută să prinzi ceva folositor în ceea ce ai recunoscut.

Ce aș putea să întrezăresc? O idee salvatoare, poate chiar ideea decisivă care să-ți arate dintr-o dată calea spre scop.

Cum poate fi utilă o idee? Ea îți arată drumul în întregul lui sau o parte a drumului; ea îți sugerează mai mult sau mai puțin clar în ce fel poți proceda. Ideile sînt mai mult sau mai puțin complete. În general, dacă ți-a venit o idee, înseamnă că ai avut noroc.

Ce pot face cu o idee incompletă? Să o cercetezi. Dacă ai impresia că este avantajoasă, este cazul să te ocupi de ea mai îndeaproape. Dacă pare o idee de nădejde, este bine să te asiguri cît de departe te conduce și să reconsideri situația. Situația s-a schimbat, datorită ideii salvatoare. Examinează noua situație sub diverse aspecte și caută legături cu ceea ce știi dinainte.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? Poți să ai noroc și să-ți vină altă idee. Eventual, această nouă idee te va conduce direct la soluție. Poate că vei avea nevoie de alte cîteva idei utile după această nouă idee. Poate că vreuna dintre aceste idei te va induce în eroare. Cu toate acestea, trebuie să fii recunoscător pentru toate ideile noi, chiar pentru cele mai puțin bune, chiar pentru cele nebuloase, de asemenea, pentru ideile suplimentare care adaugă precizări la o idee nebuloasă sau care încearcă să îmbunătățească o idee mai puțin fericită. Chiar dacă, un anumit timp, nu-ți vine nici o idee nouă mai ca lumea, trebuie să fii mulțumit dacă felul cum concepi problema devine mai complet sau mai coerent, mai omogen sau mai echilibrat.

Realizarea planului

De unde să încep? Pornește de la ideea fericită care conduce la soluție. Mergi mai departe cînd te simți sigur pe felul cum stăpînești legătura principală și cînd ai încredere că poți să completezi amănuntele secundare care eventual mai lipsesc.

Ce pot să fac? Fă în așa fel încît să stăpînești cît mai sigur problema. Efectuează amănunțit toate operațiile algebrice sau geometrice de care îți dai seama că ar putea fi posibile. Convinge-te de corectitudinea fiecărui pas, printr-un raționament formal sau prin intuiție sau, dacă este posibil, prin amîndouă. Dacă problema este foarte complicată, poți face deosebire între pași „mari" și pași „mici", fiecare pas mare fiind compus din mai mulți pași mici. Verifică întîi pașii mari și coboară treptat spre pași din ce în ce mai mici.

Ce pot cîștiga procedînd astfel? O prezentare a soluției din care fiecare pas este incontestabil corect.

Privire retrospectivă

De unde să încep? De la rezolvarea completă și corectă în toate detaliile ei.

Ce pot să fac? Consideră soluția sub diverse aspecte și caută legături cu ceea ce știi dinainte.

Examinează detaliile soluției și încearcă să le faci cît se poate de simple; parcurge părțile mai întinse ale soluției și caută să le scurtezi; încearcă să cuprinzi dintr-o privire întreaga soluție. Încearcă să modifici într-un mod avantajos părți mai mici sau mai mari ale soluției, caută să perfecționezi ansamblul soluției, s-o faci intuitivă, să o încadrezi cît mai natural în ceea ce știi dinainte. Scurtează metoda care te-a condus la soluție, caută să-i pui în evidență punctele și s-o utilizezi pentru alte probleme.

Ce pot cîștiga acționînd astfel? Poți găsi o soluție nouă și mai bună, poți descoperi fapte noi și interesante. Oricum ar fi, dacă-ți faci obiceiul de a examina și de a scurta astfel soluțiile, vei dobîndi cunoștințe bine ordonate și gata să fie folosite, îți vei dezvolta priceperea de a rezolva probleme.

Partea a III-a

SCURT DICȚIONAR DE EURISTICĂ

Am mai întîlnit cîndva această problemă? Se poate întîmpla să fi rezolvat înainte aceeași problemă cu care avem de-a face acum sau să fi auzit de ea sau să fi întîlnit o problemă foarte asemănătoare. Sînt eventualități pe care trebuie neapărat să le cercetăm. Încercăm să ne reamintim ceea ce s-a întîmplat. *Am mai întîlnit cumva această problemă? Sau poate am văzut aceeași problemă într-o formă oarecum diferită?* Chiar dacă răspunsul este negativ, astfel de întrebări pot marca începutul mobilizării unor cunoștințe utile.

Întrebarea din titlul acestui articol este folosită adesea cu un înțeles mai general. Cu scopul de a obține soluția, trebuie să extragem din memoria noastră elemente relevante, trebuie să mobilizăm părțile adecvate din cunoștințele depozitate în această memorie (*Progrese și reușită*). Firește, nu putem ști dinainte ce părți ale cunoștințelor noastre se vor dovedi relevante; există însă anumite posibilități a căror explorare nu trebuie omisă. Astfel, o anumită particularitate a problemei actuale, care a jucat un rol în rezolvarea unei alte probleme, ar putea să joace din nou un rol. De aceea, dacă o anumită particularitate a problemei actuale ni se pare importantă, ne străduim să o identificăm. Care este această particularitate? Ne este ea oare cunoscută? *Am mai întîlnit-o cumva înainte?*

Analizați-vă conjectura[1]**.** S-ar putea să fi intuit bine, dar ar fi o prostie să acceptați o conjectură care v-a venit în minte, ca și cum ar fi un adevăr demonstrat; așa procedează adesea oamenii neavizați. Conjectura făcută s-ar putea să fie greșită.

[1] Conjectura — în special cum o concepe G. Pólya — este o afirmație făcută pe baza unei cunoașteri la prima vedere a situației, fără un studiu aprofundat, ci numai pe baza ghicirii, a intuiției. Ea trebuie să satisfacă condiția de a nu fi contradictorie și servește, în acest caz, ca ipoteză de lucru. — *N.T.*

Dar ar fi o prostie tot atît de mare să disprețuiți această conjectură, care v-a venit în minte; așa fac cîteodată oamenii pedanți. Conjecturile de un anumit gen merită să fie examinate și luate în serios: este vorba despre cele care apar după ce am considerat cu atenție și am înțeles în mod real o problemă care ne interesează cu adevărat. Astfel de conjecturi conțin, de obicei, cel puțin o parte de adevăr, dar, natural, ele ne dau foarte rar întregul adevăr. Totuși avem o șansă să extragem întregul adevăr, dacă analizăm într-un mod adecvat o astfel de conjectură.

Numeroase conjecturi s-au dovedit a fi eronate, ceea ce nu le-a împiedicat să se arate utile, conducîndu-ne spre o altă conjectură mai bună.

Nici o idee nu este cu adevărat proastă decît dacă avem față de ea o atitudine necritică. Ceea ce este cu adevărat rău este să nu avem de loc idei.

1. *Feriți-vă de a proceda astfel.* Iată o povestire tipică despre dl. John Jones. Dl. Jones lucrează într-un birou. Nutrise speranța că i se va mări puțin salariul, însă, cum se întîmplă adesea cu speranțele, ea nu s-a împlinit. Unora dintre colegii săi li s-a mărit salariul, nu însă și lui. Dl. Jones nu a putut privi calm situația. Și-a tot făcut sînge rău și pînă la urmă a ajuns să-l suspecteze pe directorul său, Brown, că acesta ar fi fost răspunzător de faptul că nu i se mărise lui salariul.

Nu putem să-l blamăm pe dl. Jones că ajunsese la această bănuială. Într-adevăr, anumite indicii păreau să arate că este vorba despre directorul Brown. Adevărata greșeală a d-lui Jones a fost însă că, după ce a ajuns la bănuiala sa, a devenit orb și surd față de orice indicii care-l orientau într-o altă direcție. Se sugestiona tot timpul că directorul Brown ar fi dușmanul său personal, ceea ce-l făcu să se poarte într-un mod atît de stupid, încît, pînă la urmă, izbuti efectiv să și-l facă dușman.

Greșeala d-lui John Jones constă în faptul că el s-a purtat ca cei mai mulți dintre noi. El nu-și schimbă niciodată părerile majore, dar destul de des și de brusc părerile minore; însă niciodată el nu se îndoiește de opiniile sale, indiferent dacă sînt majore sau minore, cît timp sînt opiniile sale. El nu le pune niciodată la îndoială, nu-și pune întrebări despre ele, nu le analizează critic, mai mult, el privește cu ură o astfel de analiză critică, dacă i-ar înțelege sensul.

Să admitem că dl. John Jones are dreptate pînă la un punct. Este un om muncitor; își face datoria la slujbă și acasă. Are prea puțin timp pentru îndoieli sau analize. Cel mult, el ar putea să examineze doar cîteva dintre convingerile sale, și pentru ce ar avea îndoieli din moment ce nu-i ajunge timpul să și le analizeze?

Prin urmare, nu procedați ca dl. John Jones. Nu vă lăsați bănuiala sau conjectura să crească neanalizată, pînă devine de nedezrădăcinat. Oricum ar fi, în chestiunile teoretice, cele mai bune idei sînt zdruncinate dacă le acceptăm necritic și întărite dacă le analizăm critic.

2. *Un exemplu din matematică.* Dintre toate patrulaterele de perimetru dat, să se afle cel de arie maximă.

Care este necunoscuta? Un patrulater.

Care sînt datele? Perimetrul patrulaterului este dat.

Care este condiția? Patrulaterul căutat trebuie să aibă aria mai mare decît orice alt patrulater cu același perimetru.

Problema este foarte diferită de cele uzuale în geometria elementară și, de aceea, este cît se poate de natural să începem prin a încerca să ghicim, să facem o conjectură.

Care patrulater pare să aibă aria cea mai mare? Care ar fi conjectura cea mai simplă? Am auzit, eventual, că dintre toate figurile cu același perimetru, cercul are aria cea mai mare; s-ar putea chiar să bănuim un motiv pentru plauzibilitatea acestei afirmații. Și acum, ce patrulater este cel mai aproape de cerc? Care este cel mai aproape de el în ceea ce privește simetria?

O conjectură destul de evidentă este: pătratul. Dacă o luăm în serios, vom înțelege despre ceea ce este vorba. Trebuie să avem curajul de a enunța conjectura: „Dintre toate patrulaterele de perimetru dat, pătratul are aria maximă". Dacă ne hotărîm să analizăm această afirmație, situația se schimbă. Inițial, aveam o „problemă de aflat". După ce am formulat o conjectură, avem o „problemă de demonstrat"; trebuie să dovedim că teorema enunțată este adevărată sau falsă.

Dacă nu cunoaștem vreo problemă asemănătoare cu a noastră și rezolvată anterior, sarcina noastră ni s-ar putea părea destul de grea. *Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. Știm să rezolvăm o parte a problemei?* Ne-ar putea veni ideea că, o dată ce pătratul are o situație privilegiată printre patrulatere, el trebuie, în virtutea aceluiași fapt, să

aibă o situație privilegiată și printre dreptunghiuri. O parte a problemei noastre ar fi rezolvată, dacă am izbuti să demonstrăm următoarea propoziție: „Dintre toate dreptunghiurile de perimetru dat, pătratul are aria maximă".

Această teoremă apare mai accesibilă decît cea de mai sus; ea este, bineînțeles, mai slabă. În orice caz, trebuie să-i prindem sensul; trebuie să avem curajul de a-i da o nouă formulare, mai amănunțită. O putem enunța din nou în mod avantajos în limbajul algebrei.

Aria unui dreptunghi de laturi a și b este ab.

Latura pătratului avînd același perimetru cu dreptunghiul de mai sus este $\frac{a+b}{2}$. Așadar, aria acestui pătrat este $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Ea trebuie să fie mai mare decît aria dreptunghiului, deci, urmează să avem

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab.$$

Este adevărat? Aceeași afirmație poate fi scrisă și în forma echivalentă

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab.$$

Aceasta este adevărată, deoarece este echivalentă cu

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0$$

sau cu

$$(a - b)^2 > 0$$

și această inegalitate este cu siguranță valabilă, dacă nu avem $a = b$; așadar dreptunghiul nostru este un pătrat.

Nu am rezolvat încă problema, dar am făcut anumite progrese tocmai considerînd într-un mod corect conjectura noastră evidentă.

3. *Un exemplu nematematic.* Într-un joc de silabe încrucișate, se cere să găsim un cuvînt de 5 silabe (10 litere), definit astfel: „Acoperirea pereților din nou, de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga".

Care este necunoscuta? Un cuvînt.

Care sînt datele? Lungimea cuvîntului este dată: 5 silabe (10 litere).

Care este condiția? Ea este cuprinsă în definiție. Este vorba despre ceva cu pereți, dar destul de nebulos.

Aşadar trebuie să examinăm din nou definiţia. Făcînd aceasta, ultima parte a definiţiei ne va atrage neapărat atenţia: „...din nou, de la stînga la dreapta şi de la dreapta la stînga". *Ştim să rezolvăm o parte a problemei?* Există aici o şansă de a ghici începutul cuvîntului. O dată ce repetiţia este atît de puternic accentuată, cuvîntul ar putea foarte bine să înceapă cu RE. Este o conjectură destul de evidentă. Dacă sîntem ispitiţi să-i dăm crezare, trebuie să-i înţelegem sensul. Cuvîntul căutat arată astfel:

R E — — — — — — — —

Se poate verifica rezultatul? Dacă un alt cuvînt al jocului se încrucişează cu al nostru la prima silabă (de 2 litere), trebuie să încercăm dacă acest al doilea cuvînt nu începe cumva cu RE. S-ar putea să fie o idee bună de a trece la acest al doilea cuvînt şi de a verifica silaba RE. Dacă avem succes în verificarea lui RE sau dacă, cel puţin, nu găsim nici argument împotrivă, putem reveni la cuvîntul nostru iniţial. Ne întrebăm din nou: *Care este condiţia?* Reexaminînd definiţia, atenţia noastră poate fi concentrată asupra ultimei părţi: „...de la stînga la dreapta şi de la dreapta la stînga". Să însemne oare aceasta că cuvîntul căutat se citeşte la fel de la stînga la dreapta şi de la dreapta la stînga? Este o conjectură mai puţin evidentă (există totuşi astfel de cazuri, vezi *Descompunere şi recombinare*, 8).

Oricum ar fi, să ne analizăm conjectura; să căutăm a-i înţelege sensul. Cuvîntul ar arăta astfel:

R E — — — — — — R E.

În plus, silaba a doua trebuie să fie identică cu a patra.

Cititorul poate acum ghici relativ uşor cuvîntul[1].

Analogia este un fel de asemănare. Obiecte sau lucruri asemănătoare concordă între ele într-o anumită privinţă, obiecte sau lucruri analoge *concordă prin anumite relaţii* ale părţilor lor corespunzătoare.

1. Un paralelogram dreptunghic este analog cu un paralelipiped dreptunghic. În adevăr, relaţiile dintre laturile

[1] Exemplul a fost adoptat în traducere. S-a presupus că în acest joc de silabe încrucişate, silabele se citesc la fel într-un sens şi în celălalt. Soluţia este RETAPETARE. — *N.T.*

dreptunghiului seamănă cu cele dintre feţele paralelipipedului:

Fiecare latură a dreptunghiului este paralelă cu o altă latură şi perpendiculară pe celelalte două.

Fiecare faţă a paralelipipedului este paralelă cu o altă faţă şi perpendiculară pe celelalte.

Vom conveni să spunem că latura este un „element frontieră" al dreptunghiului, iar faţa un „element frontieră" al paralelipipedului. Acum, putem reuni cele două propoziţii de mai sus într-una singură, care se aplică în egală măsură ambelor figuri:

Fiecare element frontieră este paralel cu un alt element frontieră şi perpendicular pe celelalte elemente frontieră.

Astfel, am exprimat anumite relaţii comune celor două sisteme de obiecte comparate, anume laturile dreptunghiului şi feţele paralelipipedului dreptunghic. Analogia dintre aceste sisteme constă în această comunitate de relaţii.

2. Analogia este pretutindeni prezentă în gîndirea noastră, în vorbirea curentă, în raţionamentele noastre banale, precum şi în mijloacele de expresie artistice şi în cele mai înalte realizări ale ştiinţei. Analogia este folosită la niveluri dintre cele mai diferite. Oamenii uzează adesea de analogii vagi, ambigue, incomplete sau incomplet clarificate, dar analogia poate să se ridice pînă la nivelul preciziei matematice. Toate genurile de analogie pot juca un rol în descoperirea soluţiei şi, de aceea, nici unul dintre ele nu trebuie neglijat.

3. Putem considera că am avut noroc atunci cînd, încercînd să rezolvăm o problemă, reuşim să dăm peste o *problemă analogă mai simplă*. La pct. **15**, problema noastră iniţială se referea la diagonala unui paralelipiped dreptunghic; considerarea unei probleme analoge mai simple, privitoare la diagonala unui dreptunghi, ne-a condus la soluţia problemei iniţiale. Vom discuta acum un alt exemplu de acelaşi gen. Avem de rezolvat următoarea problemă:

Să se afle centrul de greutate al unui tetraedru omogen.

Dacă nu sîntem familiarizaţi cu calculul integral şi nu avem suficiente cunoştinţe de fizică, problema nu este de loc uşoară; ea a reprezentat o încercare ştiinţifică serioasă pe vremea lui Arhimede sau a lui Galilei. Aşadar, dacă vrem s-o rezolvăm cu cunoştinţe preliminare cît mai puţine, trebuie să căutăm o problemă analogă mai simplă. Problema corespunzătoare în plan ne vine aici în minte de la sine:

Să se afle centrul de greutate al unui triunghi omogen.

Avem acum două chestiuni, în loc de una singură. Dar este posibil ca răspunsul la acestea să fie mai uşor de găsit decît la una singură, cu condiţia ca cele două chestiuni să fie legate între ele într-un mod inteligent.

4. Lăsînd de o parte, pentru moment, problema noastră iniţială cu tetraedrul, ne vom concentra atenţia asupra problemei analoge mai simple, cu triunghiul. Pentru a rezolva problema, trebuie să ştim cîte ceva despre centrele de greutate. Următorul principiu este plauzibil şi se impune în mod natural:

Dacă un sistem S de mase este format din părţi care îşi au toate centrul de greutate în acelaşi plan, atunci planul va conţine şi centrul de greutate al sistemului S.

Acest principiu cuprinde tot ce ne trebuie pentru cazul triunghiului. Întîi, el ne arată că centrul de greutate al triunghiului este situat în planul acestuia. Apoi, putem considera că triunghiul este format din fibre (din fîşii înguste, din paralelograme „infinit înguste") paralele cu una dintre laturile triunghiului (latura AB în fig. 7). Centrul de greutate al fiecărei fibre (al fiecărui paralelogram) este, evident, punctul său central şi toate aceste puncte centrale sînt situate pe linia care uneşte vîrful C, opus laturii AB, cu mijlocul M al lui AB (vezi fig. 7).

Orice plan care trece prin mediana CM a triunghiului conţine centrele de greutate ale tuturor fibrelor paralele care

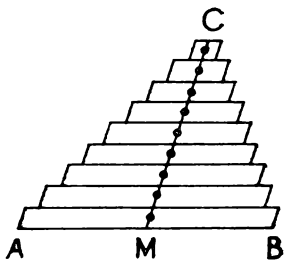

Fig. 7

formează triunghiul. Aşadar, ajungem la concluzia că centrul de greutate al întregului triunghi se află pe aceeaşi mediană. Or, el trebuie să fie situat şi pe celelalte două mediane, deci el trebuie să fie *punctul de intersecţie comun al celor trei mediane.*

Este de dorit să verificăm acum pur geometric, independent de orice ipoteză mecanică, că cele trei mediane sînt concurente.

5. După ce am studiat cazul triunghiului, cazul tetraedrului devine extrem de uşor. Am rezolvat o problemă analogă cu a noastră şi, odată ce am rezolvat-o, dispunem de un *model după care să ne călăuzim.*

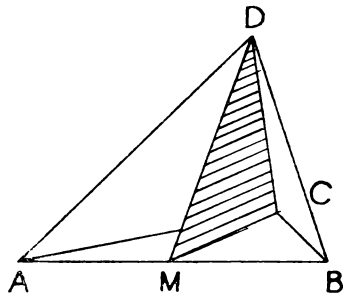

Fig. 8

La rezolvarea problemei analoge, pe care o utilizăm acum ca model, ne-am imaginat triunghiul ABC ca fiind compus din fibre paralele cu una dintre laturi, AB. Acum vom concepe tetraedrul $ABCD$ ca fiind constituit din fibre paralele cu una dintre muchii, AB.

Mijloacele fibrelor care constituie triunghiul sînt situate toate pe aceeaşi dreaptă, o mediană a triunghiului, care uneşte mijlocul M al laturii AB cu vîrful opus, C. Mijloacele fibrelor care constituie tetraedrul sînt situate toate în acelaşi plan, care uneşte mijlocul M al muchiei AB cu muchia opusă CD (vezi fig. 8); putem da acestui plan MCD denumirea de *plan median* al tetraedrului.

În cazul triunghiului, am avut trei mediane la fel cu MC, conţinînd fiecare centrul de greutate al triunghiului. De aceea, aceste trei mediane trebuie să se întîlnească în acelaşi punct, care este tocmai centrul de greutate. În cazul tetraedrului avem şase plane mediane la fel cu MCD, care unesc mijlocul unei muchii cu muchia opusă şi care conţin fiecare centrul de greutate al tetraedrului. De aceea, cele şase plane mediane trebuie să se întîlnească în acelaşi punct, care este tocmai centrul de greutate.

6. Am rezolvat, astfel, problema centrului de greutate al tetraedrului omogen. Pentru a completa soluția, este de dorit să verificăm acum pur geometric, independent de orice considerații mecanice, că cele șase plane mediane menționate trec prin același punct.

Cînd am rezolvat problema centrului de greutate al triunghiului omogen, am considerat că este de dorit să verificăm, pentru a completa soluția, că cele trei mediane ale triunghiului sînt concurente. Această problemă este analogă cu cea de mai sus, dar cu mult mai simplă.

Putem utiliza iarăși, pentru a soluționa problema referitoare la tetraedru, problema analogă mai simplă privitoare la triunghi (pe care o putem presupune rezolvată). În adevăr, să considerăm cele trei plane mediane care trec prin cele trei muchii DA, DB, DC, cu vîrful comun D; fiecare dintre ele trece și prin mijlocul muchiei opuse (planul median prin DC trece prin M, vezi fig. 8). Aceste trei plane mediane intersectează planul triunghiului ABC după cele trei mediane ale acestuia. Cele trei mediane sînt concurente (acesta este rezultatul problemei analoge mai simple) și acest punct, la fel ca D, este un punct comun al celor trei plane mediane. Dreapta care unește cele două puncte comune este comună tuturor celor trei plane mediane.

Am demonstrat că cele trei plane mediane (din cele șase) care trec prin vîrful D au o dreaptă comună. Același lucru trebuie să fie valabil pentru cele trei plane mediane care trec prin A, de asemenea pentru cele trei plane mediane care trec prin D, precum și pentru cele trei care trec prin C. Reunind în mod corespunzător aceste fapte, putem demonstra că cele șase plane mediane au un punct comun. (Cele trei plane mediane care trec prin laturile triunghiului ABC determină un punct comun și trei drepte de intersecție care sînt concurente. După cum am demonstrat însă, prin fiecare dreaptă de intersecție trebuie să mai treacă încă un plan median.)

7. Atît la 5 cît și la 6 ne-am folosit de o problemă analogă mai simplă, referitoare la triunghi, pentru a rezolva o problemă despre tetraedru. Cele două cazuri diferă însă dintr-un punct de vedere important. La 5 am recurs la *metoda* unei probleme analoge mai simple, a cărei soluție am imitat-o punct cu punct. La 6 am folosit *rezultatul* problemei analoge mai simple, fără să ne preocupe în ce fel fusese obținut acest rezultat. Cîteodată, avem posibilitatea de a utiliza *atît metoda, cît și rezultatul* problemei analoge mai simple. De altfel,

exemplul nostru precedent ne arată acest lucru, dacă considerăm cele expuse la 5 și la 6 ca părți diferite ale soluției aceleiași probleme.

Exemplul nostru este tipic. Rezolvînd o anumită problemă, putem folosi adesea soluția unei probleme analoge mai simple; putem recurge la metoda ei sau la rezultatul ei sau la amîndouă. Natural, în cazurile mai dificile pot apărea complicații care nu sînt prezentate în exemplul nostru. În special, se poate întîmpla ca soluția problemei analoge să nu fie imediat aplicabilă problemei noastre inițiale. În aceste condiții, merită să reconsiderăm soluția, să o variem și să o modificăm pînă cînd, după ce am încercat diferite forme ale soluției, o găsim eventual pe cea care permite o extindere la problema noastră inițială.

8. Este de dorit să prevedem, cu un anumit grad de plauzibilitate, rezultatul sau, cel puțin, anumite caracteristici ale rezultatului. Asemenea prevederi plauzibile sînt adesea bazate pe analogie.

Astfel, este posibil să știm că centrul de greutate al unui triunghi omogen coincide cu centrul de greutate al vîrfurilor sale (adică al celor trei puncte materiale de masă egală situate în cele trei vîrfuri ale triunghiului). Știind aceasta, putem face conjectura că centrul de greutate al unui tetraedru omogen coincide cu centrul de greutate al celor patru vîrfuri.

Această conjectură este „un raționament prin analogie". Cunoscînd că triunghiul și tetraedrul seamănă în mai multe privințe, conjecturăm că ele mai seamănă și într-o altă privință. Ar fi o prostie să considerăm drept certitudine plauzibilitatea unor astfel de conjecturi, dar ar fi o prostie tot atît de mare, dacă nu chiar mai mare, să disprețuim astfel de conjecturi plauzibile.

Raționamentul prin analogie este cel mai uzual, poate chiar și cel mai important. El ne conduce la conjecturi mai mult sau mai puțin plauzibile, care pot să fie sau să nu fie confirmate de experiență sau de un raționament mai riguros. Biochimistul care face experimente pe animale pentru a prevedea influența pe care preparatele sale o exercită asupra oamenilor, trage concluzii prin analogie. Tot așa proceda și un băiețaș pe care l-am cunoscut cîndva. Cățelușul său trebuia dus la veterinar, și el s-a interesat: „Cine este veterinarul?"

„Doctorul animalelor".

„Și care animal este doctorul animalelor?"

9. O concluzie prin analogie obținută de la mai multe cazuri paralele este mai puternică decît una obținută din mai puține cazuri. Or, calitatea este mai importantă decît cantitatea. Analogii nete și clare au mai multă greutate decît asemănări vagi, fapte ordonate sistematic contează mai mult decît colecții de cazuri întîmplătoare.

În cele de mai sus (la 8) am făcut o conjectură despre centrul de greutate al tetraedrului. Conjectura se întemeia pe o analogie; cazul tetraedrului este analog cu cel al triunghiului. Putem întări conjectura, examinînd și un alt caz analog, cel al unei bare omogene (adică al unui segment de dreaptă de densitate uniformă).

Analogia dintre

segment triunghi tetraedru

are mai multe aspecte. Segmentul este conținut într-o dreaptă, triunghiul în plan, iar tetraedrul în spațiu. Segmentele de dreaptă sînt cele mai simple figuri unidimensionale cu frontieră, triunghiurile sînt cele mai simple poligoane, iar tetraedrele cele mai simple poliedre.

Segmentul are două elemente frontieră de dimensiune zero (cele două extremități), iar interiorul său este unidimensional.

Triunghiul are trei elemente frontieră de dimensiune zero și trei elemente frontieră unidimensionale (trei vîrfuri, trei laturi), iar interiorul său este bidimensional.

Tetraedrul are patru elemente frontieră de dimensiune zero, șase unidimensionale și patru bidimensionale (patru vîrfuri, șase muchii, patru fețe), iar interiorul său este tridimensional.

Numerele de mai sus pot fi sintetizate într-un tabel. Coloanele succesive conțin numerele pentru elementele zero, uni-, bi- și tridimensionale, iar liniile succesive conțin numerele pentru segment, triunghi și tetraedru:

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Chiar o cunoaștere superficială a coeficienților binomiali ne dă posibilitatea să recunoaștem aici o porțiune din triunghiul lui Pascal. Am găsit o regularitate remarcabilă care leagă între ele segmentul, triunghiul și tetraedrul.

10. Dacă ne-am convins că există o legătură strînsă între obiectele pe care le comparăm, „raționamentele prin analogie" de tipul celor de mai jos pot avea o anumită greutate pentru noi.

Centrul de greutate al unei bare omogene coincide cu centrul de greutate al celor două extremități. Centrul de greutate al unui triunghi omogen coincide cu centrul de greutate al celor trei vîrfuri. Nu este oare cazul să bănuim că centrul de greutate al unui tetraedru omogen coincide cu centrul de greutate al celor patru vîrfuri?

De asemenea, centrul de greutate al unei bare omogene împarte distanța dintre extremitățile ei în raportul 1 : 1. Centrul de greutate al unui triunghi împarte distanța dintre fiecare vîrf și mijlocul laturii opuse în raportul 2 : 1. Nu este oare cazul să ne închipuim că centrul de greutate al unui tetraedru omogen împarte distanțele dintre fiecare vîrf și centrul de greutate al laturii fetei opuse în raportul 3 : 1?

Pare foarte puțin probabil ca conjectura sugerată de aceste întrebări să fie falsă, ca o regularitate atît de frumoasă să se prăbușească. Sentimentul că ceea ce este armonios și simplu nu poate să inducă în eroare îl călăuzește pe cel ce face descoperiri atît în matematică, cît și în alte științe și își găsește expresia în proverbul latin: *simplex sigillum veri* (simplitatea poartă pecetea adevărului).

[Cele de mai sus ne sugerează o extindere la cazul cu n dimensiuni. Pare puțin probabil ca ceea ce este adevărat pentru primele trei dimensiuni, pentru $n = 1, 2, 3$, să înceteze de a mai fi egal pentru valori mai mari ale lui n. Această conjectură este „un raționament prin inducție"; el ilustrează că inducția este bazată în mod firesc pe analogie. Vezi *Inducția și inducția matematică*.]

[11. Vom încheia prezentul articol, considerînd pe scurt cazurile cele mai importante în care analogia atinge precizia ideilor matematice.

(I) Două sisteme de obiecte matematice, să le denumim S și S', sînt în așa fel legate între ele încît anumite relații dintre obiectele sistemului S sînt guvernate de aceleași legi ca și relațiile dintre obiectele lui S'.

Acest tip de analogie dintre S și S' este ilustrat de cele discutate de noi la 1. Nu avem decît să considerăm drept S laturile dreptunghiului, iar drept S' fețele paralelipipedului dreptunghic.

(II) Avem o corespondenţă biunivocă între obiectele celor două sisteme S şi S', care conservă anumite relaţii. Aceasta înseamnă că dacă are loc o astfel de relaţie între obiectele unui sistem, aceeaşi relaţie este valabilă între obiectele corespunzătoare ale celui de-al doilea sistem. O astfel de legătură între cele două sisteme este un tip de analogie dintre cele mai precise; aceasta se cheamă izomorfism (sau izomorfism oloedral).

(III) Să presupunem că avem o corespondenţă uni- multivocă între obiectele celor două sisteme S şi S', care conservă anumite relaţii. O astfel de legătură (importantă în diverse capitole ale matematicii superioare, în special în teoria grupurilor şi pe care nu este cazul să o discutăm aici în amănunt) se numeşte izomorfism meroedral (sau omomorfism). Izomorfismul meroedral poate fi considerat ca un alt caz de analogii dintre cele mai precise.]

Au fost utilizate toate datele? Dat fiind că pe măsura rezolvării problemei cunoştinţele noastre sînt mobilizate într-o tot mai mare măsură, înţelegem problema la sfîrşit mult mai bine decît la început (*Progrese şi reuşită*, 1). Dar care este situaţia acum? Am ajuns oare la ceea ce ne trebuia? Înţelegem oare acum în mod adecvat problema? *Au fost utilizate toate datele*? *A fost utilizată întreaga condiţie*? Întrebarea corespunzătoare pentru „problemele de demonstrat" este: *A fost utilizată întreaga ipoteză*?

1. Ca ilustrare, vom reveni la „problema paralelipipedului" de la pct. **8** (şi urmărită apoi la punctele **10, 12, 14, 15**). Se poate întîmpla ca un elev să aibă ideea de a calcula diagonala unei feţe, $\sqrt{a^2+b^2}$, după care se opreşte. Profesorul îl poate ajuta, întrebîndu-l: *Ai utilizat toate datele*? Este greu să ne închipuim că elevul nu va băga de seamă că expresia $\sqrt{a^2+b^2}$ nu conţine a treia dată, c. De aceea, el va trebui să facă ceva pentru a introduce pe c. Astfel, el are şanse mari de a observa triunghiul dreptunghic decisiv, ale cărui catete sînt $\sqrt{a^2+b^2}$ şi c şi a cărui ipotenuză este diagonala căutată a paralelipipedului dreptunghic. (Vezi altă ilustrare în *Elemente auxiliare*, 3).

Chestiunile pe care le discutăm aici sînt foarte importante. Contribuţia lor la construirea soluţiei reiese clar din exemplul precedent. Ele ne pot ajuta să găsim punctul slab în modul nostru de a înţelege problema. Ele ne pot îndrepta atenţia

spre un element omis. Odată ce ştim că un anumit element a fost omis, căutăm în mod natural să-l introducem în joc. Avem astfel o cheie, avem o linie de cercetare bine definită pe care s-o urmăm şi o şansă importantă de a ajunge la ideea decisivă.

2. Chestiunile pe care le-am discutat sînt utile nu numai în construirea unei argumentări, ci şi în verificarea ei. Pentru a fi mai concreţi, vom presupune că avem de verificat demonstraţia unei teoreme a cărei ipoteză constă din trei părţi, toate trei esenţiale pentru adevărul teoremei. Cu alte cuvinte, dacă eliminăm una dintre părţile ipotezei, teorema încetează de a mai fi adevărată. De aceea, dacă demonstraţia neglijează vreo parte a ipotezei, demonstraţia este în mod necesar falsă. *A utilizat* demonstraţia *întreaga ipoteză*? A utilizat ea prima parte a ipotezei? Unde anume? Unde a folosit demonstraţia partea a doua a ipotezei? Dar pe a treia? Răspunzînd la toate aceste întrebări, ne verificăm demonstraţia.

Acest gen de verificare este eficient, instructiv şi absolut indispensabil pentru o înţelegere completă, dacă argumentarea este lungă şi grea, cum ştie foarte bine *Cititorul inteligent*.

3. Chestiunile pe care le-am discutat urmăresc examinarea completitudinii concepţiei noastre asupra problemei, a înţelegerii ei. Înţelegerea noastră este cu siguranţă incompletă, dacă nu luăm în considerare o dată esenţială sau o condiţie sau o ipoteză. Dar ea este de asemenea incompletă, dacă omitem să înţelegem sensul unui anumit termen esenţial. De aceea, pentru a ne analiza concepţia, trebuie să ne punem întrebarea: S-a ţinut oare seama de toate noţiunile esenţiale care intervin în problemă? Vezi *Definiţia*, 7.

4. Observaţiile de mai sus sînt însă susceptibile de anumite restricţii şi obiecţii. În adevăr, aplicarea lor directă este limitată la probleme „bine enunţate" şi „cu sens".

O „problemă de aflat" bine enunţată şi cu sens trebuie să aibă toate datele necesare şi să nu cuprindă nici o dată inutilă; de asemenea, condiţia ei trebuie să fie suficientă, — nici contradictorie, nici redondantă. Natural, la rezolvarea unei astfel de probleme trebuie să facem uz de toate datele şi de întreaga condiţie.

Obiectul unei „probleme de demonstrat" este o teoremă matematică. Dacă problema este bine enunţată şi are înţeles, fiecare clauză a ipotezei teoremei trebuie să fie esenţială

pentru concluzie. Natural, la demonstrația unei astfel de teoreme trebuie să utilizăm fiecare clauză a ipotezei.

Se presupune că problemele de matematică din manualele tradiționale sînt bine enunțate și au toate înțeles, sens. Totuși nu trebuie să avem prea multă încredere în aceasta; în cazul în care intervine cea mai mică îndoială, trebuie să ne întrebăm: *Poate fi satisfăcută condiția?* Încercînd să răspundem la această întrebare sau la una similară, ne putem convinge, cel puțin pînă la un anumit punct, dacă problema noastră este chiar atît de corectă cum am presupus.

Întrebarea din titlul acestui articol și întrebările legate de ea pot și trebuie să fie puse fără modificări numai atunci cînd știm că problema pe care o avem în față are înțeles și este bine enunțată sau, cel puțin, dacă nu avem motive să bănuim contrariul.

5. Există anumite probleme nematematice care pot fi, într-un anumit sens, „bine enunțate". De exemplu, se presupune că problemele de șah corect puse nu au decît o singură soluție și nu cuprind nici o piesă inutilă pe tablă etc.

În schimb, *Problemele practice* sînt, de obicei, departe de a fi bine enunțate și necesită o reconsiderare radicală a chestiunilor discutate în prezentul articol.

Bolzano, Bernhard (1781—1848), logician și matematician, a consacrat o importantă parte din cuprinzătoarea sa expunere a logicii, *Wissenschaftslehre*, problemelor euristicii (vol. 3, pp. 293—575). Cu privire la această parte a lucrării sale Bolzano spunea: „Nu-mi închipui nicidecum că aș fi în stare să prezint în aceste pagini vreun proces de investigație pe care oamenii de talent să nu-l fi cunoscut de mult; și nu vă promit nicidecum că ați putea găsi aici ceva cu totul nou în acest gen. Dar îmi voi da osteneala să formulez în cuvinte clare regulile și căile investigației, pe care le urmează toți oamenii capabili, fără ca, în majoritatea cazurilor, să-și dea seama de aceasta. Deși nu-mi fac iluzia că voi reuși pe deplin să realizez chiar și numai atît, sper că puținul pe care-l înfățișez va putea să placă unora și să aibă anumite aplicații pe viitor".

Care este necunoscuta? Ce se cere? Ce căutăm? Ce trebuie să găsim?

Care sînt datele? Ce este dat? Ce avem?

Care este condiția? Prin ce condiție este legată necunoscuta de date?

Profesorul poate folosi aceste întrebări pentru a verifica măsura în care a fost înțeleasă problema; elevul trebuie să fie capabil de a da la ele un răspuns clar. Mai mult, ele orientează atenția elevului spre părțile principale ale unei „probleme de aflat", adică necunoscuta, datele, condiția. Dat fiind că luarea în considerare a acestor părți se poate dovedi necesară în mai multe etape, întrebările pot fi repetate frecvent în fazele ulterioare ale soluției. (Vezi exemple la punctele **8, 10, 18, 20**; *Punerea în ecuație*, 3, 4; *Probleme practice*, 1; *Enigme și jocuri* etc.).

Aceste întrebări sînt de cea mai mare importanță pentru cel ce rezolvă probleme. El își verifică modul de a înțelege problema, își concentrează atenția asupra cutării sau cutărei părți principale a problemei. Soluția constă esențialmente în a pune necunoscuta în legătură cu datele. De aceea, cel ce rezolvă problema trebuie să-și concentreze mereu atenția asupra acestor elemente, întrebîndu-se: *Care este necunoscuta*? *Care sînt datele*?

Problema poate avea mai multe necunoscute sau condiția poate fi formată din diferite părți care trebuie considerate separat; de asemenea, s-ar putea să fie oportun ca o anumită dată să fie considerată aparte. De aceea, putem utiliza diverse variante ale întrebărilor noastre, cum ar fi: Care sînt necunoscutele? Care este prima dată? Care este a doua? Care sînt diversele părți ale condiției? Care este prima clauză a condiției?

Părțile principale ale unei „probleme de demonstrat" sînt ipoteza și concluzia, iar întrebările corespunzătoare sînt: *Care este ipoteza*? *Care este concluzia*? S-ar putea să avem nevoie de anumite variante de exprimare sau de modificări ale acestor întrebări adeseori utile, de exemplu: Ce presupunem? Care sînt diversele părți ale presupunerii noastre? (Vezi un exemplu la pct. **19**.)

Ce rost au demonstrațiile? Se spune că Newton, ca tînăr student, a început să învețe geometria, cum se obișnuia pe vremea aceea, citind *Elementele* lui Euclid. Citea teoremele, își dădea seama că sînt adevărate și sărea peste demonstrații. Se întreba pentru ce-și mai iau oamenii osteneala să demonstreze lucruri atît de evidente. După mulți ani, el și-a schimbat însă părerea și l-a lăudat pe Euclid.

Povestea aceasta poate fi adevărată sau nu, dar întrebarea rămîne: Ce rost are să învățăm demonstrațiile sau să le explicăm elevilor? Ce este de preferat: nici un fel de demonstrații, sau demonstrații pentru orice, sau numai anumite demonstrații? Și dacă numai unele dintre ele, atunci care anume?

1. *Demonstrații complete.* Pentru logicienii de o anumită factură nu există decît demonstrațiile complete. O adevărată demonstrație nu are voie să cuprindă nici o lacună, nici o capcană, nici o incertitudine; altminteri, nu merită numele de demonstrație. Putem oare găsi demonstrații complete care să satisfacă acest standard pretențios în viața de toate zilele sau în procedura judiciară sau în fizică? Nu prea. Este deci greu să înțelegem cum putem ajunge la ideea unei astfel de demonstrații riguros complete.

Putem spune, fără a exagera prea mult, că omenirea a preluat această idee de la un singur om și de la o singură carte; de la Euclid și de la *Elementele* sale. Oricum ar fi, studiul elementelor geometriei plane ne dă pînă astăzi cea mai bună ocazie de a înțelege ideea de demonstrație riguroasă.

Să luăm ca exemplu demonstrația teoremei: *Suma unghiurilor într-un triunghi este egală cu două unghiuri drepte*[1]. Figura 9, pe care cei mai mulți dintre noi o cunoaștem, nu are nevoie de prea multe explicații. Prin vîrful A trece o dreaptă

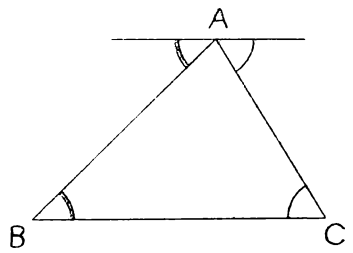

Fig. 9

paralelă cu latura BC. Unghiurile din B și din C ale triunghiului sînt egale cu unghiurile respective din A, marcate în figură, ca alterne interne. Cele trei unghiuri ale triunghiului sînt egale cu cele trei unghiuri avînd vîrful comun în A, care formează un unghi de 180°, adică două unghiuri drepte: teorema este astfel demonstrată.

[1] Este o parte din propoziția 32 din Cartea I a *Elementelor* lui Euclid. Demonstrația care urmează nu aparține lui Euclid, dar era cunoscută vechilor greci.

Dacă un elev a parcurs programa de matematică fără a fi înțeles în mod real cîteva demonstrații de felul celei de mai sus, el este îndreptățit să adreseze cele mai amare reproșuri școlii sale și profesorilor săi. În adevăr, trebuie să facem distincție între lucruri de mai mare și de mai mică importanță. Dacă elevul nu și-a însușit unele aspecte particulare din geometrie, el n-a pierdut prea mult; s-ar putea ca astfel de fapte să-i folosească prea puțin în viața sa de mai tîrziu. Dacă el nu a ajuns însă să cunoască demonstrațiile geometrice, el a pierdut cele mai bune și cele mai simple exemple de argumentare corectă, a pierdut cea mai bună ocazie de a ajunge la ideea de raționament riguros. Fără această idee, elevul este lipsit de un etalon valabil cu care să aprecieze argumentările care au pretenția de a fi adevărate și pe care le va întîlni mereu în viața de toate zilele.

Pe scurt, dacă educația are intenția de a-i da elevului noțiunile de evidență intuitivă și de raționament logic, ea trebuie să rezerve un anumit loc demonstrațiilor geometrice.

2. *Sistem logic.* Geometria, așa cum este expusă în *Elementele* lui Euclid, nu este o simplă culegere de fapte, ci un sistem logic. Axiomele, definițiile și propozițiile (teoremele) nu sînt înșirate la întîmplare, ci așezate într-o ordine desăvîrșită. Fiecare propoziție este astfel așezată, încît să poată fi fundată pe axiomele, definițiile și propozițiile precedente. Putem considera că ordonarea propozițiilor constituie principala realizare a lui Euclid, iar sistemul lor logic este cel mai mare merit al *Elementelor*.

Geometria lui Euclid nu este numai un sistem logic, ci și cel dintîi și cel mai mare exemplu pentru un astfel de sistem, pe care alte științe au încercat și mai încearcă încă să-l imite. Este oare cazul ca alte științe — în particular cele care sînt foarte departe de geometrie, ca psihologia sau dreptul — să imite logica rigidă a lui Euclid? Este o întrebare discutabilă; dar nimeni nu poate lua parte cu competență la această discuție, dacă nu este familiarizat cu sistemul euclidian.

Sistemul geometriei este cimentat prin demonstrații. Fiecare propoziție este legată printr-o demonstrație de axiomele, definițiile și propozițiile anterioare. Dacă nu înțelegem aceste demonstrații, nu putem înțelege esența autentică a sistemului.

Pe scurt, dacă educația are intenția de a-i da elevului noțiunea de sistem logic, ea trebuie să rezerve un anumit loc demonstrațiilor geometrice.

3. *Sistem mnemotehnic.* Autorul nu este de părere că noțiunile de evidență intuitivă, de raționament riguros și de sistem logic ar fi inutile pentru cineva. Totuși sînt cazuri în care studiul acestor noțiuni nu este considerat ca fiind absolut necesar, din cauza lipsei de timp sau din alte motive. Dar chiar și în astfel de cazuri este de dorit să fie studiate demonstrații.

Demonstrațiile ne oferă o argumentare clară; astfel, ele consolidează sistemul logic și ne ajută să ținem minte diversele elemente ale unui sistem închegat. Să luăm exemplul discutat mai sus, în legătură cu fig. 9. Această figură ne arată, evident, că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°. Figura pune în legătură acest fapt cu un altul: că unghiurile alterne interne sînt egale. Fapte legate între ele sînt mai interesante și se păstrează mai bine în memorie decît fapte izolate. Așadar, figura noastră fixează cele două propoziții geometrice legate între ele în mintea noastră și, pînă la urmă, figura și propozițiile devin un bun inalienabil al intelectului.

Trecem acum la cazul în care dobîndirea unor noțiuni generale nu este considerată ca necesară, ci se recomandă doar acumularea unor anumite fapte. Chiar într-un astfel de caz, faptele trebuie prezentate într-o oarecare legătură și într-un fel de sistem, deoarece lucruri izolate se învață greu și se uită ușor. Orice gen de legătură care unește faptele într-un mod simplu, firesc și durabil, este aici bine venit. Un astfel de sistem nu trebuie neapărat să fie întemeiat pe logică, el trebuie doar să ajute în mod efectiv memoria; el trebuie să fie ceea ce se cheamă un sistem *mnemotehnic.* Dar chiar din punctul de vedere al unui sistem pur mnemotehnic, demonstrațiile pot fi utile, îndeosebi cele simple. De exemplu, elevul trebuie să învețe un fapt legat de suma unghiurilor unui triunghi, și un alt fapt despre unghiurile alterne. Există oare vreun procedeu mai simplu, mai natural și mai eficient pentru a memora aceste fapte decît fig. 9?

Pe scurt, chiar dacă nu se acordă o importanță specială noțiunilor logice generale, demonstrațiile pot fi utile ca procedeu mnemotehnic.

4. *Sistemul cărții de bucate.* Ne-am ocupat de avantajele demonstrațiilor, dar, bineînțeles, nu am susținut că toate

demonstrațiile trebuie date *in extenso.* Dimpotrivă, există cazuri cînd aceasta este aproape imposibil; un exemplu important în această direcție este predarea calculului diferențial și integral studenților din școlile tehnice superioare.

Dacă acest calcul este expus conform normelor riguroase moderne, el necesită demonstrații de un anumit grad de dificultate și de subtilitate („demonstrații cu ajutorul lui ε"). Însă inginerii studiază calculul diferențial și integral în vederea aplicațiilor sale și nu au nici destul timp, nici destul antrenament sau interes pentru a se descurca în demonstrații lungi sau pentru a aprecia subtilități. Există astfel o puternică tentație de a suprima toate demonstrațiile. Dacă procedăm însă astfel, reducem calculul diferențial și integral la nivelul unei cărți de bucate.

Cartea de bucate dă o descriere amănunțită a ingredientelor și a procedeelor, dar nu și demonstrații pentru prescripțiile ei și nici argumente pentru rețetele ei; dovada pentru calitatea unei budinci o obținem mîncînd-o. Cartea de bucate poate servi perfect acestui scop. În adevăr, ea nu are nevoie de nici un fel de sistem logic sau mnemotehnic, deoarece rețetele sînt scrise sau tipărite și nu trebuie ținute minte.

Or, un autor al unui manual de calcul diferențial și integral sau un profesor nu vor putea face față sarcinilor lor dacă vor urma prea îndeaproape sistemul cărții de bucate. Dacă metodele sînt prezentate fără demonstrații, procedeele lipsite de motivare nu pot fi înțelese. Dacă regulile sînt predate fără justificare, regulile nelegate între ele vor fi repede uitate. Matematica nu poate fi verificată asemenea unei budinci; dacă se exclud toate raționamentele, cursul de calcul diferențial și integral se poate transforma ușor într-un inventar incoerent de date indigeste.

5. *Demonstrații incomplete.* Calea cea mai bună pentru a rezolva dilema dintre demonstrațiile prea dificile și nivelul cărții de bucate constă în folosirea rezonabilă a demonstrațiilor incomplete.

Pentru un logician riguros, o demonstrație incompletă nu este demonstrație. Și, bineînțeles, trebuie să facem o distincție netă între demonstrațiile incomplete și cele complete; este rău să le confundăm, este și mai rău să prezentăm una drept cealaltă. Este penibil cînd autorul unui manual prezintă într-un mod ambiguu o demonstrație incompletă, cu o evidentă ezitare între jenă și pretenția că demonstrația este completă. Dar demonstrațiile incomplete pot fi utile

cînd sînt folosite la locul potrivit și cu bun simț. Rostul lor nu este de a înlocui demonstrațiile complete (ceea ce nu vor putea niciodată), ci de a face expunerea interesantă și coerentă.

Exemplul 1. *O ecuație algebrică de grad* n *are exact* n *rădăcini.* Această propoziție, denumită teorema fundamentală a algebrei (Gauss), trebuie expusă adesea unor elevi care nu sînt pregătiți să-i înțeleagă demonstrația. Ei știu însă că o *ecuație de gradul întîi are o rădăcină,* iar una *de gradul al doilea, două rădăcini.* Totodată, această propoziție dificilă are o parte care poate fi prezentată cu ușurință: *nici o ecuație de grad* n *nu are mai mult decît* n *rădăcini distincte.* Constituie oare aceste fapte o demonstrație completă a teoremei fundamentale? Nicidecum. Ele sînt totuși suficiente pentru a-i conferi oarecare interes și plauzibilitate și pentru a o fixa în mintea celor care trebuie s-o învețe și aceasta este principalul.

Exemplul 2. *Suma a oricare două dintre unghiurile plane formate de un triedru este mai mare decît al treilea.* Evident, teorema se reduce la afirmația că, *într-un triunghi sferic, suma a două laturi oarecare este mai mare decît a treia.* O dată ce am observat aceasta, ne gîndim natural la analogia dintre triunghiul sferic și cel rectiliniu. Constituie oare aceste observații o demonstrație? Nicidecum, dar ele ne ajută să înțelegem și să memorăm teorema.

Primul nostru exemplu prezintă un interes istoric. Căci timp de aproximativ 250 de ani, matematicienii au crezut în teorema fundamentală, fără să aibă o demonstrație completă, în fapt fără o bază mai mare decît cea menționată mai sus. Al doilea exemplu indică *A n a l o g i a* drept izvor important pentru conjecturi. În matematică, la fel ca în științele naturii, descoperirea ia adesea ca punct de plecare observația, analogia și inducția. Aceste mijloace, folosite cu bun simț la construirea unei argumentări euristice plauzibile, sînt deosebit de atrăgătoare pentru fizicieni și ingineri (vezi și *I n d u c ț i a ș i i n d u c ț i a m a t e m a t i c ă*, 1, 2, 3).

Rolul și interesul demonstrațiilor incomplete sînt explicate într-o anumită măsură de studiul nostru asupra procesului de rezolvare a unei probleme. Oarecare experiență în rezolvarea problemelor ne arată că prima idee a unei demonstrații este de foarte multe ori incompletă. Observația cea mai importantă, conexiunea principală, germenele demonstrației pot fi conținute aici, dar detaliile trebuie obținute ulterior

și ele ne dau adesea destulă bătaie de cap. Unii autori, dar nu prea mulți, au darul de a prezenta tocmai germenele demonstrației, ideea ei principală în forma cea mai simplă și de a indica natura detaliilor care urmează a fi completate. O astfel de demonstrație, deși incompletă, poate fi mult mai instructivă decît o demonstrație prezentată cu toate amănuntele.

Pe scurt, demonstrațiile incomplete pot fi utilizate ca un fel de procedeu mnemotehnic (însă, natural, nu ca ținînd loc de demonstrații complete), atunci cînd scopul urmărit este o suficientă coerență a expunerii, și nu consistența logică riguroasă.

Susținerea demonstrațiilor incomplete este foarte periculoasă. Abuzurile posibile pot fi însă îngrădite printr-un număr redus de reguli. Întîi, dacă o demonstrație este incompletă, ea trebuie prezentată, într-un fel sau altul, ca atare. Al doilea, un autor sau un profesor nu are dreptul să prezinte demonstrația incompletă a unei teoreme decît dacă el cunoaște foarte bine demonstrația completă.

Și trebuie să mărturisim că prezentarea cu bun simț a unei demonstrații incomplete nu este de loc ceva ușor.

Cititorul inteligent al unei cărți de matematică urmărește două lucruri:

1° să-și dea seama că respectivul pas al argumentării este corect;

2° să înțeleagă scopul acestui pas.

Auditorul inteligent al unei lecții sau conferințe de matematică urmărește același lucru. Dacă el nu poate vedea că un anumit pas al argumentării este corect și nici măcar să bănuiască, eventual, că pasul este incorect, el este îndreptățit să protesteze și să pună întrebări. Dacă nu poate să-și dea seama de scopul acestui pas și nici să-i bănuiască rațiunea, de obicei nu poate nici măcar să formuleze o obiecție clară, nu poate protesta, ci este doar nedumerit și plictisit și pierde firul argumentării.

Profesorul inteligent sau autorul inteligent al unui manual trebuie să aibă în vedere aceste puncte. Firește, este necesar să scrie și să vorbească corect; dar nu este suficient. O deducție corect prezentată în carte sau pe tablă poate să fie inaccesibilă și neinstructivă, dacă scopul pașilor consecutivi este ininteligibil, dacă cititorul sau ascultătorul nu-și poate da seama cum a fost omenește posibil să se ajungă la

o astfel de demonstrație, dacă el nu este capabil să extragă din prezentare o sugestie în legătură cu modul în care ar putea el singur să găsească o astfel de demonstrație.

Întrebările și recomandările din lista noastră pot fi utile autorului și profesorului pentru a sublinia scopul și motivarea demonstrației. În această privință, este deosebit de folositoare întrebarea: *Au fost utilizate toate datele?* Autorul sau profesorul poate arăta, cu ajutorul acestei întrebări, un motiv satisfăcător pentru a lua în considerare o dată nefolosită pînă atunci. Cititorul sau ascultătorul poate recurge la aceeași întrebare pentru a înțelege motivul autorului sau al profesorului de a considera cutare și cutare element și el poate să-și dea seama că, punînd această întrebare, ar fi fost în stare să descopere singur respectivul pas sau respectiva demonstrație.

Condiția este o parte principală a unei „probleme de aflat". Vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*, 3. Vezi și *Termenii vechi și noi*, 2.

O condiție se cheamă *redondantă*, dacă conține părți superflue. Ea se numește *contradictorie*, dacă părțile ei sînt opuse una alteia și inconsistente, astfel că nu există un obiect care să satisfacă condiția.

Așadar, dacă o condiție este exprimată printr-un număr de ecuații liniare mai mare decît numărul necunoscutelor, ea este fie redondantă, fie contradictorie; dacă ea este exprimată prin mai puține ecuații decît necunoscute, ea este insuficientă pentru a determina necunoscutele; în cazul în care condiția este exprimată prin tot atîtea ecuații cîte necunoscute avem, ea este, de regulă, tocmai suficientă pentru a obține necunoscutele, dar, în cazuri excepționale, ea poate fi contradictorie sau insuficientă.

Contradictorie. Vezi *Condiția*.

Corolar se numește o teoremă pe care o obținem ușor din analiza unei alte teoreme pe care tocmai am descoperit-o. Cuvîntul este de origine latină; o traducere mai apropiată de sensul original ar fi „gratificație" sau „bacșiș".

Cunoaștem vreo problemă înrudită? Ne putem cu greu imagina o problemă absolut nouă, care să nu fie asemănătoare și înrudită cu nici una dintre cele rezolvate anterior; dacă o

astfel de problemă ar putea exista, ea ar fi de nerezolvat. În adevăr, cînd rezolvăm o problemă, profităm totdeauna de probleme rezolvate anterior, recurgînd la rezultatul sau la metoda lor sau la experiența pe care am dobîndit-o rezolvîndu-le. Și, natural, problemele de pe urma cărora profităm trebuie să fie în vreun fel înrudite cu problema noastră actuală. De aici și întrebarea: *Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

De obicei, nu este de loc greu să ne reamintim de probleme soluționate înainte și care sînt mai mult sau mai puțin înrudite cu cea prezentă. Dimpotrivă, s-ar putea să găsim prea multe probleme de acest fel și să avem dificultăți în alegerea uneia utile. Trebuie să căutăm probleme mai îndeaproape înrudite cu a noastră; *Să cercetăm necunoscuta* sau căutăm o problemă rezolvată anterior, care este legată de cea prezentă prin *Generalizare*, *Particularizare* sau *Analogie*.

Întrebarea de care ne ocupăm aici are scopul de a mobiliza cunoștințele dobîndite înainte (*Progrese și reușită*, 1). O parte esențială din cunoștințele noastre de matematică este înmagazinată în memorie sub formă de teoreme demonstrate înainte. De aici întrebarea: *Cunoaștem vreo teoremă care ne-ar putea fi utilă?* Această întrebare se poate dovedi deosebit de potrivită în cazul unei „probleme de demonstrat", adică atunci cînd trebuie să dovedim că o teoremă propusă este adevărată sau falsă.

Dacă nu puteți să rezolvați problema, nu vă întristați prea mult, ci căutați să vă consolați obținînd un succes mai ușor, *încercați să rezolvați întîi o problemă înrudită*; aceasta vă va da curaj să atacați din nou problema inițială. Nu uitați că superioritatea omului constă în a ocoli un obstacol pe care nu-l poate înfrînge direct, în a inventa o problemă auxiliară adecvată, atunci cînd problema propriu-zisă este inaccesibilă.

Ați putea să vă imaginați o problemă înrudită și mai accesibilă? Trebuie acum *să inventați* o problemă înrudită, nu, doar *să vă reamintiți* o astfel de problemă; sper că înainte ați căutat răspunsul la întrebarea: *Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

În paragraful din lista noastră, care începe cu titlul prezentului articol, întrebările celelalte au un scop comun: *Modificări ale problemei*. Există diverse mijloace de a atinge acest scop, cum sînt *Generalizarea*,

Particularizarea, Analogia etc., care sînt diferite procedee de *Descompunere şi recombinare.*

Definiţia unui termen este o propoziţie care îi stabileşte înţelesul sau semnificaţia, cu ajutorul altor termeni despre care se presupune că sînt binecunoscuţi.

1. *Termenii tehnici* ai matematicii sînt de două feluri. Unii sînt acceptaţi ca termeni primari sau fundamentali şi nu se definesc. Alţii se consideră termeni derivaţi şi se definesc în forma cuvenită, adică înţelesul lor este prezentat prin termeni fundamentali şi prin termeni derivaţi, pe care i-am definit anterior. Astfel, nu dăm definiţia formală a unor noţiuni fundamentale cum sînt punctul, dreapta şi planul[1]. În schimb, dăm definiţii formale pentru noţiuni ca „bisectoarea unui unghi" sau „cerc" sau „parabolă".

Definiţia acestui din urmă termen poate fi formulată astfel. Se numeşte *parabolă* locul geometric al punctelor echidistante de un punct fix şi de o dreaptă fixă. Punctul fix este *focarul* parabolei, iar dreapta fixă este *directoarea* ei. Se subînţelege că toate elementele considerate se află într-un plan fix şi că punctul fix (focarul) nu este situat pe dreapta fixă (directoarea).

Se presupune că cititorul nu cunoaşte înţelesul termenilor definiţi: parabolă, focarul parabolei, directoarea parabolei. Se presupune însă că este familiarizat cu semnificaţia tuturor celorlalţi termeni, anume: punct, dreaptă, plan, distanţa de la un punct la alt punct fix, loc geometric etc.

2. *Definiţiile din dicţionare* nu diferă prea mult ca aspect de definiţiile matematice, dar sînt redactate într-un alt spirit.

Întocmitorul unui dicţionar are de-a face cu sensul, cu înţelesul uzual al cuvintelor. Natural, el *acceptă* acest înţeles obişnuit şi-l prezintă, cît poate de îngrijit, sub forma unei definiţii.

Matematicianul nu are de-a face cu înţelesul obişnuit al termenilor săi tehnici sau, cel puţin, nu aceasta îl priveşte

[1] În această privinţă, concepţiile noastre sînt altele decît ale lui Euclid şi ale urmaşilor săi greci, care defineau punctul, dreapta şi planul. „Definiţiile" lor ar putea fi însă cu greu considerate ca definiţii formale, ci sînt mai curînd un fel de ilustrări intuitive. Bineînţeles, ilustrările sînt permise şi chiar foarte oportune din punct de vedere didactic.

în primul rînd. Îl interesează prea puţin ce pot însemna în vorbirea de toate zilele termeni tehnici ca „cerc" sau „parabolă" sau alţii. Definiţia matematică *creează* sensul, înţelesul unui termen matematic.

3. *Exemplu.* Să se construiască punctul de intersecţie al unei drepte cu o parabolă, dată prin focarul şi prin directoarea ei.

Felul cum abordăm o problemă trebuie să depindă de nivelul cunoştinţelor noastre. Abordarea problemei de mai sus depinde mai ales de măsura în care sîntem familiarizaţi cu proprietăţile parabolei. Dacă ştim mult despre parabolă, încercăm să facem uz de cunoştinţele noastre şi să extragem de aici ceva util: *Cunoaştem vreo teoremă care ar putea fi utilă aici? Cunoaştem vreo problemă înrudită?* Dacă ştim prea puţin despre parabolă, focar şi directoare, aceşti termeni mai mult ne încurcă şi dorim, în mod firesc, să scăpăm de ei. Cum putem scăpa de ei? Să urmărim dialogul dintre profesor şi elev, care discută această problemă. Ei au ales deja *notaţii corespunzătoare*: P pentru oricare dintre punctele de intersecţie necunoscute, F pentru focar, d pentru directoare, c pentru dreapta care taie parabola.

„Şi, *care este necunoscuta?*"

„Punctul P".

„*Care sînt datele?*"

„Dreptele c şi d şi punctul F".

„*Care este condiţia?*"

„P este un punct de intersecţie al dreptei c şi al parabolei de directoare d şi de focar F".

„Aşa este. Ştiu că ai avut prea puţine ocazii de a studia parabola, dar cred că poţi să spui ce este o parabolă".

„Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de focar şi de directoare".

„Bine. Definiţia este corectă. Este adevărat, dar trebuie s-o şi folosim; *să revenim la definiţii.* În virtutea definiţiei parabolei, ce putem spune despre punctul P"?

„P este pe parabolă. De aceea, P este egal depărtat de d şi de F".

„Foarte bine! *Să facem un desen*".

Elevul marchează în fig. 10 segmentele $P\,F$ şi $P\,Q$, acesta din urmă fiind perpendiculara dusă din P pe d.

„Şi, acum, *s-ar putea reformula problema?*"

...

„Ai putea da o altă enunțare condiției problemei, folosind segmentele introduse în desen?"

„P este un punct de pe dreapta c, avînd proprietatea că $P F = P Q$".

„Bine. Dar te rog să-mi spui în cuvinte: Ce este $P Q$?"

„Distanța punctului P la dreapta d".

„Foarte bine. Și acum, ai putea să formulezi altfel pro-

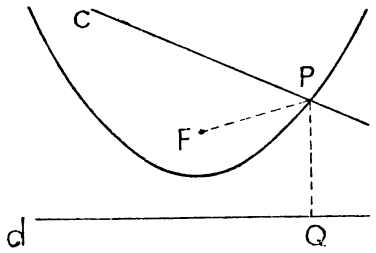

Fig. 10

blema? Dar te rog, să o enunți îngrijit, într-o frază închegată".

„Să se construiască un punct P, pe o dreaptă dată c, egal depărtat de un punct dat F și o dreaptă dată d".

„Observă cît am progresat de la enunțul inițial pînă la această nouă formulare. Enunțul inițial al problemei era plin de termeni tehnici puțin cunoscuți ca parabolă, focar, directoare; suna cam pompos și bombastic. Acum, n-a mai rămas nimic din acești termeni tehnici puțin cunoscuți; ai *simplificat* problema. Este foarte bine!"

4. *Eliminarea termenilor tehnici* este rezultatul muncii în exemplul precedent. Am pornit de la un enunț al problemei care conținea anumiți termeni tehnici (parabolă, focar, directoare) și am ajuns pînă la urmă la un nou enunț, care nu mai cuprinde aceste cuvinte.

Pentru a elimina un termen tehnic, trebuie să-i cunoaștem definiția; dar nu este suficient să-i cunoaștem definiția, trebuie s-o și folosim. În exemplul de mai sus nu a fost suficient să ne amintim de definiția parabolei. Pasul decisiv a constat în a introduce în figură segmentele $P F$ și $P Q$ a căror egalitate era asigurată în baza definiției parabolei. Acesta este procedeul tipic. Introducem elemente adecvate în înțelegerea problemei. Pe baza definiției stabilim relațiile dintre elementele

pe care le introducem. Dacă aceste relații exprimă complet înțelesul, înseamnă că am utilizat definiția. O dată ce am utilizat definiția, am eliminat termenii tehnici.

Procedeul descris mai sus poate fi denumit *revenirea la definiții*.

Revenind la definiția unui termen tehnic, scăpăm de acest termen și introducem în locul său elemente noi și relații noi. Schimbarea care se produce astfel în concepția noastră asupra problemei poate fi importantă. Oricum ar fi, o reformulare o *Modificare a problemei* ne apropie de rezultat.

5. *Definiții și teoreme cunoscute.* Dacă cunoaștem numele „parabolă" și avem o idee vagă despre forma curbei, dar nu mai știm altceva despre ea, cunoștințele noastre sînt vădit insuficiente pentru a rezolva problema propusă ca exemplu sau orice altă problemă geometrică serioasă referitoare la parabolă. Ce fel de cunoștințe sînt necesare în acest scop?

Știința geometriei poate fi considerată ca fiind formată din axiome, definiții și teoreme. Parabola nu este menționată în axiome, care au de-a face numai cu noțiuni primare ca punct, dreaptă etc. Orice considerație geometrică privitoare la parabolă, soluția oricărei probleme legate de ea trebuie să folosească fie definiția ei, fie teoreme despre ea. Pentru a rezolva o astfel de problemă trebuie să cunoaștem cel puțin definiția, dar este preferabil să cunoaștem și anumite teoreme.

Firește, ceea ce am spus despre parabolă este valabil pentru orice noțiune derivată. Cînd ne apucăm de rezolvarea unei probleme care cuprinde o astfel de noțiune, nu putem ști încă la ce va fi mai bine să recurgem: la definiția noțiunii sau la vreo teoremă despre ea; este însă cert că trebuie să facem uz de una sau de cealaltă.

Există totuși cazuri în care nu avem de ales. Dacă nu cunoaștem decît definiția noțiunii, și nimic mai mult, sîntem nevoiți să folosim definiția. Dacă nu cunoaștem decît definiția, cel mai bun lucru pe care-l putem face este să revenim la definiție. Dacă însă cunoaștem mai multe teoreme despre respectiva noțiune și avem multă experiență în utilizarea ei, există o anumită probabilitate să ajungem la o teoremă utilă despre ea.

6. *Definiții diferite.* Sfera este definită, în mod obișnuit, ca loc geometric al punctelor egal depărtate de un punct dat. (Punctele sînt acum situate în spațiu, și nu cuprinse într-un plan.) Dar sfera mai poate fi definită ca suprafață descrisă de

un cerc care se rotește în jurul unui diametru. Se cunosc și alte definiții ale sferei și sînt posibile și multe altele.

Dacă avem de rezolvat o problemă legată de noțiuni derivate, cum ar fi cele de sferă sau de parabolă, și vrem să revenim la definiție, putem avea de ales între diferite definiții. În astfel de cazuri, alegerea definiției celei mai adecvate poate să fie de foarte mare utilitate.

Aflarea ariei suprafeței unei sfere era, pe vremea cînd a obținut-o Arhimede, o problemă importantă și dificilă. Arhimede putea să aleagă între definițiile citate mai sus ale sferei. El a preferat să conceapă sfera ca suprafață generată de un cerc care se rotește în jurul unui diametru fix. A înscris în cerc un poligon regulat cu număr par de laturi, în care diametrul fix unește două vîrfuri opuse. Poligonul regulat aproximează cercul și, rotindu-se împreună cu el, generează o suprafață convexă, compusă din două conuri cu vîrfurile în extremitățile diametrului fix între care se situează mai multe trunchiuri de con. Această suprafață compusă aproximează sfera și a fost folosită de Arhimede pentru a calcula aria suprafeței de sferă. Dacă vom concepe sfera ca loc al punctelor egal depărtate de centru, aceasta nu ne va sugera o aproximație atît de simplă a suprafeței ei.

7. Revenirea la definiții este importantă în inventarea unei argumentări, dar ea joacă un rol de seamă și în verificarea ei.

Să admitem că cineva prezintă o nouă soluție a problemei lui Arhimede, referitoare la aria suprafeței unei sfere. Dacă el nu are decît o idee vagă despre sferă, soluția lui nu va putea fi nicidecum bună. S-ar putea ca el să aibă o idee clară despre sferă, dar dacă nu va utiliza această idee în argumentarea sa, nu ne putem da seama dacă are sau nu vreo idee, și argumentarea sa nu este bună. De aceea, urmărind argumentarea, așteptăm momentul cînd el va spune ceva substanțial despre sferă, cînd va face uz de definiție sau de vreo teoremă despre ea. Dacă acest moment nu survine niciodată, soluția este proastă.

Bineînțeles, trebuie să verificăm în același mod nu numai argumentările altora, ci și pe ale noastre. *Am ținut seama de toate noțiunile esențiale care intervin în problemă?* Cum am utilizat această noțiune? I-am utilizat înțelesul, definiția? Am utilizat fapte esențiale, teoreme cunoscute despre ea?

Importanța acestei reveniri la definiții în analiza valabilității unei argumentări a fost pusă în evidență de Pascal,

care a stabilit regula: *Substituer mentalement les définitions à la place des définis*, (să substituim în minte faptele definitorii pentru termenii definiți). J. Hadamard a subliniat și el importanța revenirii la definiții în construirea unui raționament matematic.

8. Revenirea la definiții este o importantă operație intelectuală. Dacă vrem să înțelegem de ce sînt atît de importante definițiile cuvintelor, trebuie să ne dăm seama mai întîi de însemnătatea cuvintelor. Cu greu am putea gîndi, dacă nu am folosi cuvinte sau semne sau simboluri de un anumit fel. Așadar, cuvintele și simbolurile au o anumită putere. Oamenii neinițiați își închipuie că cuvintele și simbolurile ar avea o putere magică. Noi putem înțelege această credință, dar nu trebuie s-o împărtășim. Trebuie să știm că puterea unui cuvînt nu rezidă în sunetul său, în *vocis flatus*, în „suflarea caldă" a vorbitorului, ci în ideile pe care ni le reamintește cuvîntul și, în ultimă instanță, în faptele ce stau la baza ideilor.

De aceea, este o tendință rațională să căutăm înțelesul cuvintelor și faptele care se ascund în dosul lor. Revenind la definiții, matematicianul caută să dezvăluie în spatele termenilor tehnici relațiile actuale dintre obiectele matematice, după cum fizicianul caută experimente bine definite îndărătul termenilor săi tehnici, iar omul obișnuit, care posedă o oarecare doză de bun simț, vrea să țină seama numai de fapte și să nu se lase prostit de vorbe goale.

Descartes, René (1596—1650), mare matematician și filozof francez, a vrut să dea o metodă universală pentru rezolvarea problemelor, dar lucrarea sa *Reguli pentru îndrumarea minții* a rămas neterminată. Fragmentele acestui tratat, descoperite în manuscrisele sale și tipărite postum, conțin materiale mai numeroase și mai interesante, referitoare la soluția problemei decît cele din lucrarea sa mai cunoscută *Discours de la methode*, deși, după toate probabilitățile, aceasta a fost scrisă după *Reguli*. Următoarele rînduri pe care le citățm din Descartes par să ne dezvăluie originea *Regulilor*: „Ca tînăr, cînd auzeam vorbindu-se despre invenții ingenioase, încercam să le invent eu însumi, chiar fără să-l citesc pe autor. Procedînd astfel, mi-am dat seama treptat că făceam uz de anumite reguli".

Descompunerea și recombinarea sînt importante operații intelectuale.

Examinați un obiect care vă interesează sau care v-a stîrnit curiozitatea: o casă pe care aveți de gînd s-o închiriați, o telegramă importantă, dar enigmatică, un obiect a cărui destinație și origine vă intrigă sau vreo problemă pe care intenționați s-o rezolvați. Aveți o impresie asupra obiectului în întregul său, dar s-ar putea ca această impresie să nu fie suficient de definită. Vă izbește un anumit detaliu și vă concentrați atenția asupra lui. Apoi vă concentrați asupra altui detaliu, pe urmă iarăși asupra altuia. Se pot prezenta diverse combinații ale detaliilor și, după un răstimp, considerați din nou obiectul ca pe un întreg, dar îl vedeți de astă dată cu alți ochi. Descompuneți întregul în părți și recombinați părțile într-un întreg mai mult sau mai puțin diferit.

1. Dacă începeți să intrați în detalii, ați putea să vă pierdeți printre ele. Particularități prea numeroase sau prea mărunte sînt o povară pentru mintea noastră. Ele vă pot împiedica să acordați suficientă atenție punctului principal sau chiar să observați punctul principal. Gîndiți-vă la omul care nu vede pădurea din cauza copacilor.

Firește, nu vrem să ne pierdem timpul cu amănunte inutile și trebuie să ne rezervăm eforturile pentru ceea ce este esențial. Dificultatea constă în faptul că nu putem spune dinainte care detalii se vor arăta, pînă la urmă, necesare și care nu.

De aceea, trebuie, în primul rînd, să înțelegem problema în întregul ei. O dată ce am înțeles problema, vom avea o poziție mai favorabilă pentru a judeca ce puncte particulare pot fi cele mai importante. După ce am examinat unul sau două puncte esențiale, trebuie să avem o poziție mai bună pentru a judeca ce alte detalii ar putea servi unei cercetări mai adecvate. Să intrăm în amănunte și să descompunem treptat problema, dar nu dincolo de ceea ce este necesar.

Bineînțeles, profesorul nu se poate aștepta ca toți elevii să acționeze rațional în această privință. Dimpotrivă, este o obișnuință stupidă și dăunătoare a unor elevi de a începe cu detalii înainte de a fi înțeles problema în ansamblu.

2. Vom considera acum probleme de matematică, „probleme de aflat".

După ce am înțeles problema în întregul ei, scopul ei, punctul ei principal, vrem să intrăm în detalii. De unde este cazul să începem? Aproape totdeauna este rațional să începem cu considerarea părților principale ale problemei, adică necunoscuta, datele și condiția. Aproape în toate cazurile este recomandabil să începem analiza detaliată a problemei cu întrebările: *Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiția?*

Dacă vrem să examinăm alte detalii, ce trebuie să facem? Foarte frecvent este recomandabil să analizăm fiecare dată ca atare, *să separăm diversele părți ale condiției* și să le examinăm pe fiecare în parte.

Ni se poate părea necesar, îndeosebi cînd problema noastră este mai grea, să o descompunem mai departe și să examinăm și alte detalii mai îndepărtate. Astfel, s-ar putea dovedi necesar *să revenim la definiția* unor termeni, să introducem elemente noi implicate de definiție și să cercetăm elementele astfel introduse.

3. După ce am descompus problema, încercăm să-i recombinăm elementele într-un mod nou. În particular, putem încerca să recombinăm elementele problemei pentru a obține vreo problemă nouă mai accesibilă, pe care s-o putem folosi eventual ca problemă auxiliară.

Natural, există nenumărate posibilități de recombinare. Problemele dificile reclamă combinări originale, ieșite din comun, care nu sînt ușor de găsit la prima vedere, iar ingeniozitatea celui ce rezolvă problema se manifestă în originalitatea modului de a combina. Există însă unele tipuri de combinații uzuale și relativ simple, suficiente pentru probleme mai ușoare, pe care trebuie să le cunoaștem și cu care trebuie să începem încercările noastre, chiar dacă vom fi eventual obligați apoi să recurgem la mijloace mai puțin evidente.

Există o clasificare formală în care combinațiile cele mai uzuale și mai utile sînt ordonate într-un mod clar. Cînd construim o problemă nouă din problema propusă, putem

(1) să păstrăm necunoscuta și să modificăm restul (datele și condiția);

(2) să păstrăm datele și să modificăm restul (necunoscuta și condiția);

(3) să modificăm și necunoscuta și datele.

Vom examina pe rînd aceste cazuri.

[Cazurile (1) și (2) coincid. Într-adevăr, este posibil să păstrăm atît necunoscuta cît și datele și să transformăm problema, modificînd numai forma condiției. De exemplu, cele două probleme de mai jos, deși în aparență echivalente, nu sînt identice:

Să se construiască un triunghi echilateral, dacă se dă o latură.

Să se construiască un triunghi cu unghiuri egale, dacă se dă o latură.

Deosebirea dintre enunțurile celor două probleme, care nu este prea mare în exemplul nostru, poate să fie esențială în alte cazuri. Astfel de cazuri sînt chiar importante în anumite privințe, dar ne-ar lua prea mult spațiu să le discutăm aici. [Cf. *Problema auxiliară*, 7, ultima observație].

4. *Păstrarea necunoscutei* și modificarea datelor și a condiției, pentru a transforma problema propusă, este un procedeu adesea util. Recomandarea *Să cercetăm necunoscuta* se referă la probleme avînd aceeași necunoscută. Putem încerca să ne gîndim la o problemă de același fel, pe care am rezolvat-o anterior: *Și să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară.* Dacă nu izbutim să ne reamintim o astfel de problemă, putem încerca să o inventăm: *ne-am putea imagina și alte date adecvate pentru a determina necunoscuta*?

O nouă problemă, mai strîns legată de problema propusă are șanse mai bune de a se arăta utilă. De aceea, dacă păstrăm necunoscuta, căutăm să păstrăm și unele date și o anumită parte a condiției, modificînd cît mai puțin numai una sau două dintre date și o mică parte a condiției. O metodă bună este una în care suprimăm cîte ceva, fără să adăugăm nimic; păstrăm necunoscuta, *să păstrăm numai o parte a condiției, omițînd restul*, dar nu mai introducem o clauză sau o dată nouă. Exemple și comentarii referitoare la acest caz sînt date la 7, 8.

5. *Dacă păstrăm datele*, putem încerca să introducem o necunoscută nouă, utilă și mai accesibilă. O astfel de necunoscută trebuie obținută din datele inițiale și ne referim la o astfel de necunoscută atunci cînd punem întrebarea: *Am putea deduce ceva util din datele problemei*?

Remarcăm că aici sînt de dorit două lucruri. Întîi, noua necunoscută trebuie să fie mai accesibilă, adică mai ușor de obținut din date decît necunoscuta inițială. Al doilea, noua necunoscută trebuie să fie utilă, adică o dată ce am găsit-o, ea trebuie să fie capabilă de a ne servi într-un mod clar la căutarea necunoscutei inițiale. Pe scurt, noua necunoscută trebuie să fie ca o *piatră de sprijin* în mijlocul unui rîu. Această piatră este mai apropiată decît celălalt mal la care vreau să ajung și, odată ce am pus piciorul pe piatră, aceasta mă ajută să înaintez spre malul dorit.

Noua necunoscută trebuie să fie și accesibilă și utilă, însă, în practică, trebuie să ne mulțumim adesea cu mai puțin. Dacă nu avem nimic mai bun, nu este lipsit de rațiune să deducem din date ceva ce prezintă șanse de a fi folositor; și este de asemenea rațional să facem încercări cu o nouă necunoscută, strîns legată de cea inițială, chiar dacă ea nu pare mai accesibilă la prima vedere.

De exemplu, dacă problema noastră constă în a afla diagonala unui paralelipiped (ca la pct. **8**), putem introduce ca nouă necunoscută diagonala unei fețe. Putem proceda astfel fie pentru că *știm* că din diagonala feței putem obține și diagonala corpului (ca la pct. **10**), fie pentru că ne dăm seama că diagonala feței este ușor de obținut și pentru că *bănuim* că ea ne-ar putea fi folositoare la aflarea diagonalei paralelipipedului. (Cf. *Au fost utilizate toate datele*? 1.)

Dacă problema noastră este de a construi un cerc, avem de aflat două lucruri: centrul și raza; putem spune că problema noastră constă din două părți. În unele cazuri, o parte este mai accesibilă decît cealaltă și, de aceea, oricum ar fi, este rațional să considerăm o clipă posibilitatea: *Știm să rezolvăm o parte a problemei*? Întrebîndu-ne astfel, cîntărim șansele: merită oare să ne concentrăm asupra centrului sau asupra razei și să alegem centrul sau raza drept nouă necunoscută? Întrebările de acest fel se dovedesc adesea folositoare. În probleme mai complicate sau mai grele, ideea decisivă, care conduce la soluție, constă în a descoperi partea mai accesibilă, dar esențială a problemei.

6. *Modificînd atît necunoscuta cît și datele* ne abatem mai mult de la linia noastră inițială decît în cazurile precedente. Firește, aceasta nu este de natură să ne placă; ne dăm seama că sîntem în pericol să pierdem cu totul din vedere problema inițială. Putem fi însă nevoiți să recurgem la o astfel de schimbare mai mare, dacă modificările mai puțin radicale nu ne-au dat nimic accesibil și util și sîntem ispitiți să ne îndepărtăm mai mult de problema noastră inițială, dacă problema cea nouă prezintă șanse de succes mai mari. *Am putea schimba necunoscuta sau datele, sau și pe una și pe celelalte, dacă este cazul, astfel încît noua necunoscută să fie mai strîns legată de noile date*?

O cale interesantă de modificare a necunoscutei și a datelor constă în a pune în locul necunoscutei una dintre date. (Vezi *Se poate folosi rezultatul*? 3.).

7. *Exemplu.* Să se construiască un triunghi, fiind date latura a, înălțimea h, perpendiculară pe a, și unghiul α, opus lui a.

Care este necunoscuta? Un triunghi.

Care sînt datele? Două segmente, a și h, și un unghi α.

Acum, dacă avem oarecare rutină în rezolvarea problemelor de construcții geometrice, încercăm să reducem problema

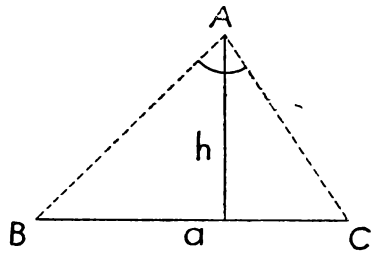

Fig. 11

la construcția unui punct. Desenăm o dreaptă BC, egală cu latura dată a. Apoi nu ne mai rămîne decît să găsim vîrful A, opus laturii a, vezi fig. 11. În fapt, am ajuns la o nouă problemă.

Care este necunoscuta? Punctul A.

Care sînt datele? Segmentul h, unghiul α și cele două puncte B și C, date prin poziția lor.

Care este condiția? Distanța de la punctul A la dreapta BC trebuie să fie egală cu h și $\sphericalangle BAC = \alpha$.

În fond, am transformat problema, schimbînd și necunoscuta și datele. Noua necunoscută este un punct, pe cînd cea veche era un triunghi. Unele date sînt aceleași în ambele probleme, anume segmentul h și unghiul α; însă în vechea problemă ni se dădea o lungime a și acum avem în locul ei: două puncte, B și C.

Noua problemă nu este dificilă. Recomandarea de mai jos ne aduce foarte aproape de soluție.

Să separăm diversele părți ale condiției. Condiția are două părți, una referitoare la segmentul dat h, iar cealaltă la unghiul dat α. Punctul necunoscut trebuie să fie

(I) la distanța h de la segmentul BC; și

(II) vîrful unui unghi de mărimea α dată, ale cărui laturi trec prin punctele date B și C.

Dacă *păstrăm numai o parte a condiției, omițînd restul*, punctul necunoscut nu este complet determinat. Există multe puncte care satisfac partea (I) a condiției, și anume toate punctele de pe paralela la dreapta BC, dusă la distanța h[1]. Această paralelă este locul geometric al punctelor care satisfac partea (I) a condiției. Locul geometric al punctelor care satisfac partea (II) este un arc de cerc cu extremitățile în B și în C. Putem descrie ambele locuri; intersecția lor este punctul căutat.

Procedeul aplicat aici prezintă un oarecare interes; cînd rezolvăm probleme de construcții geometrice, putem adesea urma cu succes acest model: să reducem problema la construcția unui punct și să construim punctul ca intersecție a două locuri geometrice.

Însă un anumit pas al acestui procedeu prezintă un interes mai general; cînd rezolvăm „probleme de aflat" de indiferent ce natură, putem urma modelul: *Să păstrăm numai o parte a condiției omițînd restul.* Făcînd aceasta, slăbim condiția problemei propuse, micșorăm restricțiile impuse necunoscutei. *În ce măsură este acum determinată necunoscuta, cum mai poate ea să varieze*? Prin această întrebare punem, în fapt, o nouă problemă. Dacă necunoscuta este un punct în plan (ca în exemplul nostru), soluția noii probleme constă în a determina un loc descris de punct. Dacă necunoscuta este un obiect matematic de altă natură (la pct. **18** era un pătrat), avem de descris adecvat și de caracterizat precis o anumită mulțime de obiecte. Chiar dacă necunoscuta nu este un obiect matematic (ca în exemplul următor, de la 8), poate fi util să considerăm, să caracterizăm, să descriem sau să inventariem obiectele care satisfac o anumită parte a condiției impuse necunoscutei în problema inițială.

8. *Exemplu.* Într-un joc de cuvinte încrucișate în care sînt permise calamburul și anagrama, găsim următoarea definiție:

„Direct și invers organ de mașină (cinci litere)".

Care este necunoscuta? Un cuvînt.

Care este condiția? Cuvîntul are cinci litere. El are legătură cu o anumită parte a unei mașini. Trebuie să fie un cuvînt și, sperăm, nu prea obișnuit.

[1] Planul este tăiat în două prin dreapta BC. Alegem unul dintre semiplane în care construim pe A și putem să ne rezumăm la o singură paralelă la BC; altfel trebuie considerate două paralele.

Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta? Nu. Sau, mai curînd, condiția este eventual suficientă însă partea din condiție care este de pe acum clară este cu siguranță insuficientă. Există prea multe cuvinte care o satisfac, ca de exemplu „roată", „volan" și altele.

Condiția este exprimată echivoc, bineînțeles intenționat. Dacă nu reușim să găsim nimic care să poată fi descris plauzibil care să fie „organ de mașină direct" și totodată, „organ de mașină invers", putem presupune că cele două sensuri se referă la felul cum *citim* cuvîntul. S-ar putea ca examinarea acestei interpretări a definiției să fie o idee bună.

Să separăm diversele părți ale condiției. Condiția are două părți, una referitoare la înțelesul cuvîntului, iar cealaltă la pronunțarea lui. Cuvîntul necunoscut trebuie să fie

(I) un cuvînt scurt, însemnînd o anumită parte a unei mașini;

(II) un cuvînt de cinci litere care, citit de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga să dea, de fiecare dată, un organ de mașină.

Dacă *păstrăm numai o parte a condiției omițînd restul* necunoscuta nu este complet determinată. Există multe cuvinte care satisfac partea (I) a condiției; avem aici un fel de loc geometric. Am putea „descrie" acest loc (I), „urmărind" apoi „intersecția" lui cu locul (II). Procedeul natural constă în a ne concentra asupra părții (I) a condiției, în a ne reaminti cuvinte care au înțelesul prescris, iar după ce am izbutit să ne reamintim cîte un astfel de cuvînt, să cercetăm dacă are sau nu lungimea cerută și dacă poate sau nu să fie citit invers. Se poate să ne reamintim mai multe cuvinte, înainte de a ajunge la cel bun: roată, volan, bielă, motor...

Aceasta este: „rotor"!

9. La 3 am clasificat posibilitățile de a obține o nouă „problemă de aflat" din recombinarea unor elemente dintr-o altă „problemă de aflat". Dacă nu introducem o singură problemă nouă, ci două sau mai multe, avem mai multe posibilități pe care le menționăm doar, fără a încerca să le clasificăm.

Pot să apară și posibilități de altă natură. În particular, soluția unei „probleme de aflat" poate să depindă de soluția unei „probleme de demonstrat". Ne vom mărgini să relevăm această importantă posibilitate, pe care nu o putem discuta din lipsă de spațiu.

10. În privința „problemelor de demonstrat", nu mai avem de adăugat decît puține observații; ele sînt analoge cu comentariile mai ample de mai sus referitoare la „problemele de aflat" (2—9).

După ce am înțeles o astfel de problemă în întregul ei, trebuie, în general, să analizăm părțile ei principale. Părțile principale sînt ipoteza și concluzia teoremei al cărei adevăr sau a cărei falsitate trebuie demonstrate. Trebuie să înțelegem bine aceste părți: *Care este ipoteza? Care este concluzia?* Dacă este nevoie să intrăm în detalii mai particulare, putem *separa diversele părți ale ipotezei*, considerîndu-le apoi rînd pe rînd. Putem trece pe urmă la alte detalii, înaintînd tot mai departe în descompunerea problemei.

După ce am descompus problema, putem încerca să-i recombinăm elementele într-un alt mod. În particular, putem încerca să recombinăm elementele pentru a obține o altă teoremă. Aici există trei posibilități.

(1) *Păstrăm concluzia* și modificăm ipoteza. Încercăm întîi să ne reamintim o astfel de teoremă: *Să cercetăm concluzia! Și să ne gîndim la o teoremă cunoscută, avînd aceeași concluzie sau una similară.* Dacă nu reușim să ne amintim de o astfel de teoremă, încercăm să inventăm una: *am putea să ne gîndim la vreo altă ipoteză din care să deducem cu ușurință concluzia?* Putem modifica ipoteza, omițînd cîte ceva și neadăugînd nimic: *Să păstrăm numai o parte a ipotezei și să suprimăm restul; mai rămîne oare concluzia în picioare?*

(2) *Păstrăm ipoteza* și modificăm concluzia: *Am putea deduce ceva util din ipoteză?*

(3) *Modificăm atît ipoteza, cît și concluzia.* Înclinăm mai mult să le modificăm pe amîndouă, dacă nu am avut succes modificînd numai una. *Am putea să modificăm ipoteza sau concluzia sau pe amîndouă, dacă este cazul, astfel încît noua ipoteză să fie mai apropiată de noua coucluzie?*

Nu intenționăm să clasificăm aici diversele posibilități care apar atunci cînd, pentru a rezolva o anumită „problemă de demonstrat", introducem două sau mai multe „probleme de demonstrat" noi, sau dacă o punem în legătură cu o „problemă de aflat" corespunzătoare.

Diagnostic. Se folosește aici ca termen tehnic pedagogic cu înțelesul de „caracterizare mai amănunțită a muncii elevului". Nota caracterizează munca elevului, însă într-un mod mai aproximativ. Profesorul care vrea să îmbunătățească munca elevului are nevoie de o caracterizare mai minuțioasă

a punctelor bune şi rele, după cum medicul are nevoie de un diagnostic, pentru a îmbunătăţi starea pacientului.

Ne referim aici în mod special la reuşita elevului în rezolvarea problemelor. Cum o putem caracteriza? Putem folosi într-o anumită măsură distincţia dintre cele patru faze ale soluţiei. În adevăr, comportarea elevului în diversele faze îl caracterizează destul de bine.

Incompleta *înţelegere a problemei*, rezultată din concentrarea insuficientă, este poate cea mai răspîndită deficienţă în rezolvarea problemelor. În *construirea planului* şi în obţinerea ideii generale a soluţiei sînt frecvente două greşeli opuse. Unii elevi se reped să calculeze şi să construiască, fără nici un plan, fără nici o idee generală; ceilalţi aşteaptă neajutoraţi să le vină vreo idee şi nu sînt în stare să facă nimic pentru a-i accelera apariţia. În *realizarea planului*, eroarea cea mai frecventă constă în insuficienta atenţie, în lipsa de răbdare pentru a verifica fiecare pas. Omiterea *verificării rezultatului* este foarte frecventă; elevul este fericit că a ajuns la un răspuns, pune jos creionul şi nu este şocat nici chiar dacă rezultatul este cu totul neverosimil.

După ce a stabilit diagnosticul minuţios al unei greşeli de acest fel, profesorul are anumite şanse de a o îndrepta, insistînd asupra întrebărilor corespunzătoare din listă.

Elemente auxiliare. La sfîrşitul lucrării înţelegem mult mai mult despre o problemă decît la începutul ei (*Progrese şi reuşită*, 1). Pe măsură ce lucrarea noastră progresează, adăugăm noi elemente la cele luate în considerare iniţial. Un element introdus în speranţa că va stimula rezolvarea problemei se numeşte *element auxiliar*.

1. Există diverse feluri de elemente auxiliare. Cînd rezolvăm o problemă de geometrie, putem introduce linii noi în figura noastră, *linii auxiliare*. În rezolvarea unei probleme de algebră, putem introduce o *necunoscută auxiliară* (*Problema auxiliară*, 1). Se numeşte *teoremă auxiliară* teorema pe care ne apucăm să o demonstrăm în speranţa că vom înainta astfel în soluţia problemei noastre iniţiale.

2. Există diferite motive pentru a introduce elemente auxiliare. Sîntem mulţumiţi cînd reuşim să ne amintim de o *problemă înrudită cu a noastră şi rezolvată anterior*. Este probabil ca o astfel de problemă să fie utilizabilă, dar nu ştim încă în ce fel s-o folosim. De exemplu, problema pe care încercăm să o rezolvăm este una de geometrie, iar problema înrudită pe

care am rezolvat-o în trecut şi pe care am izbutit să ne-o reamintim acum este o problemă referitoare la triunghiuri. Or, figura noastră nu conţine nici un triunghi; pentru a putea folosi problema reamintită, ne trebuie un triunghi; de aceea, trebuie să introducem unul, adăugînd linii auxiliare corespunzătoare în figura noastră. În general, o dată ce ne-am reamintit o problemă înrudită şi rezolvată anterior şi vrem s-o folosim în problema noastră actuală, trebuie să ne întrebăm adesea: *Nu am putea să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?* (Exemplul de la pct. **10** este tipic).

Revenirea la definiţii ne oferă o altă posibilitate de a introduce elemente auxiliare. De exemplu, definind cercul, trebuie să menţionăm nu numai centrul şi raza, ci trebuie să introducem aceste elemente geometrice în figura noastră. Dacă nu le introducem, nu putem folosi în mod concret definiţia; a enunţa definiţia fără a desena nimic înseamnă a ne ţine de vorbe goale.

Încercarea de a folosi rezultate cunoscute şi revenirea la definiţii alcătuiesc cele mai bune motive pentru introducerea unor elemente auxiliare; dar ele nu sînt singurele. Putem adăuga elemente auxiliare la înţelegerea problemei noastre, pentru a o face mai completă, mai sugestivă, mai cunoscută, deşi nu prea ştim explicit în ce fel vom putea folosi elementele adăugate. S-ar putea doar să intuim că am avut o „idee ingenioasă", concepînd problema astfel cu adăugarea a cutare şi cutare elemente.

Putem avea o raţiune sau alta pentru a introduce un element auxiliar, dar întotdeauna trebuie să avem o raţiune anumită. Nu trebuie să introducem elemente auxiliare fără rost.

3. *Exemplu.* Să se construiască un triunghi, fiind date un unghi, înălţimea coborîtă din vîrful unghiului dat şi perimetrul triunghiului.

Să introducem notaţii corespunzătoare. Fie α unghiul dat, h înălţimea coborîtă din vîrful A al lui α, şi p perimetrul dat. *Să facem un desen*, în care situăm uşor α şi h. *Au fost utilizate toate datele?* Nu, figura noastră nu conţine lungimea dată p, egală cu perimetrul triunghiului. Trebuie deci să-l introducem pe p. Dar cum?

Putem încerca să-l introducem pe p în diferite feluri. Încercările reprezentate în fig. 12 şi fig. 13 sînt greoaie. Dacă încercăm să ne dăm seama singuri de ce ele sînt nesatisfăcătoare, vom înţelege că sînt lipsite de simetrie.

În adevăr, triunghiul are trei laturi necunoscute a, b, c. Ca deobicei, notăm cu a latura opusă vîrfului A; știm că

$$a + b + c = p.$$

Laturile b și c joacă același rol; ele pot fi schimbate între ele;

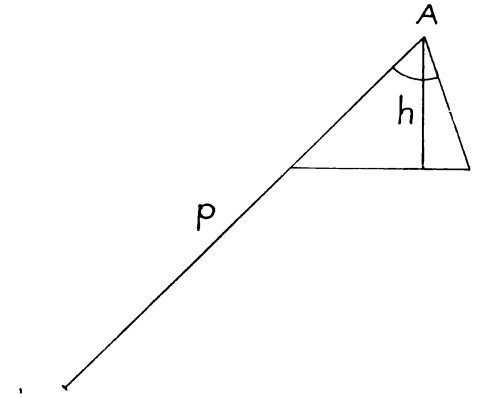

Fig. 12

problema noastră este simetrică în raport cu b și cu c. Însă b și c nu au același rol în figurile noastre 12 și 13; în așezarea lungimii p am tratat în mod diferit laturile b și c; figurile 12 și 13 fac să se piardă simetria naturală a problemei în raport

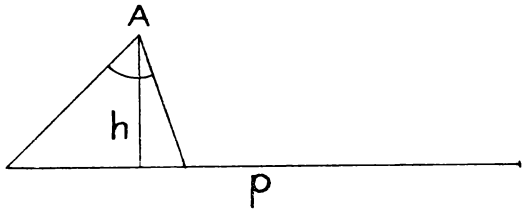

Fig. 13

cu b și cu c. Trebuie să-l așezăm astfel pe p, încît să fie în aceeași relație cu b și cu c.

Acest raționament ne poate ajuta, sugerîndu-ne să așezăm lungimea p cum se vede în fig. 14. Adăugăm la latura a a

triunghiului segmentul CE, de lungime b, de o parte, și segmentul BD, de lungime c, de cealaltă parte, astfel ca p să apară în fig. 14 ca segment ED de lungime

$$b + a + c = p.$$

Dacă avem un pic de experiență în rezolvarea problemelor de construcție, vom introduce neapărat în figură, alături de ED,

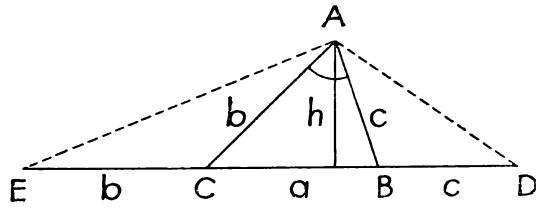

Fig. 14

segmentele auxiliare AD și AE, care sînt fiecare baza cîte unui triunghi isoscel. Prin urmare, nu este de loc nerațional să introducem în problemă elemente care sînt deosebit de simple și de bine cunoscute, ca triunghiul isoscel.

Am avut noroc în felul cum am introdus segmentele auxiliare. Examinînd noua figură, putem descoperi că $\sphericalangle EAD$ este într-o relație simplă cu unghiul dat α. În adevăr, folosind triunghiurile isoscele ABD și ACE, constatăm că $\sphericalangle DAE = \frac{\alpha}{2} + 90°$. După această observație, este natural să încercăm construcția triunghiului DAE. Încercînd această construcție, introducem o problemă auxiliară mult mai ușoară decît cea inițială.

4. Profesorii și autorii de manuale nu trebuie să uite că elevul inteligent și *Cititorul inteligent* nu se mulțumesc să verifice că un pas dintr-un raționament este corect, ci vor să cunoască și motivul, și scopul diverșilor pași. Introducerea unui element auxiliar este un pas izbitor. Dacă o linie auxiliară ingenioasă apare pe neașteptate într-o figură fără nici o motivare, și rezolvă în mod surprinzător problema, elevii și cititorii inteligenți sînt derutați; ei se simt induși în eroare. Matematica este interesantă în măsura în care apelează la rațiunea noastră, și la posibilitățile noastre de invenție. Dar nu avem nimic de învățat despre raționament și invenție, dacă motivul și scopul celui mai izbitor pas rămîn in-

inteligibile. A face ca fiecare pas să fie inteligibil, datorită unor observații corespunzătoare (ca mai sus, la 3) sau prin întrebări și recomandări alese cu grijă (ca în punctele **10**, **18**, **19**, **20**) cere o mulțime de timp și de eforturi; dar merită.

Enigme și jocuri. După cum am arătat la pct. 3, întrebările și recomandările din lista noastră sînt independente de subiectul despre care este vorba și aplicabile la tot felul de probleme. Este destul de interesant să verificăm această afirmație la diferite enigme și jocuri.

Să luăm, de exemplu, „cartea de vizită" TIA FLOREA; se cere să aflăm meseria acestei persoane. Problema constă în a afla o „anagramă", adică un nou aranjament al literelor din aceste cuvinte, așa încît să formeze un singur cuvînt. Este interesant de observat că, la rezolvarea acestui joc, mai multe întrebări din lista noastră se dovedesc potrivite și chiar stimulatoare.

Care este necunoscuta? Un cuvînt.

Care sînt datele? Cele două cuvinte TIA FLOREA.

Care este condiția? Cuvîntul căutat are 9 litere, și anume cele cuprinse în cele două cuvinte date.

Să facem un desen. Este destul de util să marcăm 9 spații goale:

— — — — — — — — —

S-ar putea reformula problema? Trebuie să găsim un cuvînt care să conțină, într-un anumit aranjament, literele

AAEIO FLRT

Este, bineînțeles, un enunț echivalent al problemei (vezi *Problema auxiliară*, 6). S-ar putea ca această nouă formulare să fie avantajoasă. Despărțind vocalele de consoane (ceea ce este important, spre deosebire de ordinea alfabetică) ne dăm seama de un alt aspect al problemei. Astfel, vedem acum că cuvîntul căutat are cinci silabe, dacă nu conține diftongi.

Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. O problemă înrudită constă în a forma cuvinte cu unele dintre literele date. Putem, cu siguranță, să formăm cuvinte scurte de acest fel. Căutăm apoi să găsim cuvinte din ce în ce mai lungi. Cu cît folosim mai multe litere, cu atît ne apropiem mai mult de cuvîntul căutat.

Știm să rezolvăm o parte a problemei? Cuvîntul cerut este relativ lung, deci ar putea să aibă părți distincte. Este, probabil, un cuvînt compus sau derivat dintr-un alt cuvînt prin adăugarea unei terminații uzuale. Despre ce terminație uzuală ar putea fi vorba?

— — — — — —O A R E
— — — — — — — I Ț Ă[1]

Să păstrăm numai o parte a condiției, omițînd restul. Putem încerca să ne gîndim la un cuvînt lung, pe cît posibil cu șapte silabe și avînd relativ puține consoane.

Întrebările și recomandările din lista noastră nu pot avea o acțiune magică. Ele nu ne pot furniza soluția tuturor jocurilor posibile, fără nici un efort din partea noastră. Dacă cititorul vrea să găsească cuvîntul, el trebuie să încerce și să se gîndească. Ceea ce pot să facă întrebările și recomandările din listă este „să mențină mașina în funcțiune". Atunci cînd, descurajați de insucces, tindem să părăsim problema, ele ne pot sugera un nou procedeu, un nou aspect, o nouă variantă a acesteia. Ele ne pot face să continuăm a ne gîndi la problemă.

Vezi un alt exemplu la *Descompunere și recombinare*, 8).

Euristica, sau euretica, sau *ars inveniendi* a fost numele unei anumite materii de studiu nu prea clar circumscrise, aparținînd logicii sau filozofiei, sau psihologiei, care a fost adesea caracterizată în linii mari, arareori expusă în amănunt și practic dată uitării astăzi. Scopul euristicii constă în a studia metodele și regulile descoperirii și ale invenției. Anumite urme ale unui astfel de studiu se pot găsi la comentatorii lui Euclid; un pasaj din *Pappus* este deosebit de interesant în această privință. Cele mai celebre încercări de a construi un sistem de euristică se datoresc lui *Descartes* și lui *Leibniz*, amîndoi mari matematicieni și filozofi. *Bolzano* a dat o prezentare amănunțită și valoroasă a euristicii. Cartea noastră este o încercare de a reînvia euristica într-o formă modernă și modestă. Vezi *Euristica modernă*.

Adjectivul euristic înseamnă „servind la descoperire".

[1] Exemplul a fost adaptat în traducere. Vedem destul de ușor că Tia Florea este FILATOARE. — *N.T.*

Euristica modernă caută să înțeleagă procesul de rezolvare a problemelor, în special *operațiile mintale tipic utile* în acest proces. Ea dispune de diferite surse de informație, dintre care nici una nu trebuie neglijată. Un studiu serios al euristicii ar trebui să țină seama atît de fondul logic, cît și de cel psihologic, nu trebuie să neglijeze ceea ce autori mai vechi ca Pappus, Descartes, Leibniz și Bolzano au avut de spus în această materie și mai ales nu trebuie să neglijeze experiența lipsită de idei preconcepute. Experiența în rezolvarea problemelor și experiența în observarea modului cum rezolvă alții probleme trebuie să fie baza pe care se construiește euristica. În acest studiu nu trebuie să desconsiderăm nici un fel de probleme și să găsim trăsăturile comune în modul de a opera cu probleme de orice fel; trebuie să tindem către trăsăturile generale, independente de conținutul problemelor. Studiul euristicii vizează scopuri „practice": o mai bună înțelegere a operațiilor mintale care se arată de cele mai multe ori utile în rezolvarea problemelor poate exercita o bună influență asupra predării, în special asupra predării matematicii.

Cartea de față este o primă încercare de a realiza acest program. Vom discuta acum în ce fel se încadrează în acest program diversele articole ale „Dicționarului".

1. În fond, lista noastră este o listă de operații mintale tipic utile în rezolvarea problemelor; întrebările și recomandările pe care le cuprinde indică astfel de operații. Unele dintre aceste operații sînt descrise din nou în partea a doua, iar unele dintre ele sînt discutate mai profund și ilustrate în partea întîi.

Pentru informații suplimentare asupra întrebărilor și recomandărilor particulare din listă, cititorul trebuie să se adreseze celor 15 articole ale „Dicționarului" ale căror titluri coincid cu primele propoziții din cele 15 paragrafe ale listei: *Care este necunoscuta? Poate fi satisfăcută condiția? Să facem un desen... Se poate folosi rezultatul?* Cititorul care vrea să se informeze asupra unui punct particular al listei trebuie să se uite la primul cuvînt din paragraful în care este conținut acest punct, iar apoi să caute articolul în Dicționar, care poartă același titlu. De exemplu, recomandarea *Să revenim la definiții* este conținută în paragraful din listă a cărui primă frază este *S-ar putea reformula problema?* Aici, la articolul respectiv, cititorul va găsi o trimitere

la *Definiție*, iar în acest articol, recomandarea care-l interesează este explicată și exemplificată.

2. Procesul de rezolvare a problemelor este un proces complex, cu mai multe aspecte diferite. Principalele 12 articole ale „Dicționarului" studiază mai amplu unele dintre aceste aspecte. În cele ce urmează vom menționa titlurile lor.

Cînd muncim intens, sîntem foarte sensibili la progresele muncii noastre; sîntem stimulați cînd progresele noastre sînt rapide și deprimați cînd înaintăm încet. Ce este esențial pentru *Progrese și reușită* în rezolvarea problemelor? Articolul care discută această chestiune este adesea citat în alte părți ale „Dicționarului" și trebuie citit printre primele.

Cînd încercăm să rezolvăm o problemă, considerăm pe rînd diferitele ei aspecte, o răsucim în fel și chip în mintea noastră. *Modificări ale problemei* sînt esențiale în munca pe care o facem. Putem varia sau modifica problema prin *Descompunerea și recombinarea* elementelor ei, putem reveni la *Definiția* unora dintre termeni sau recurge la bogatele resurse ale *Generalizării*, *Particularizării* și *Analogiei*. Modificînd problema, putem fi conduși la *Elemente auxiliare* sau la descoperirea unei *Probleme auxiliare* mai accesibile.

Trebuie să deosebim cu grijă două feluri de probleme, *Problemele de aflat, problemele de demonstrat*. Lista noastră este adaptată în mod special pentru „problemele de aflat". Pentru a o putea aplica și „problemelor de demonstrat" trebuie să revizuim și să schimbăm unele dintre întrebări și recomandări.

În toate genurile de probleme, dar mai ales în problemele de matematică nu prea simple, *Notațiile* corespunzătoare și *Figurile* geometrice ne acordă adesea un ajutor indispensabil.

3. Procesul de rezolvare a problemelor are mai multe aspecte; unele dintre ele nu sînt de loc luate în considerare în această carte, pe cînd altele sînt tratate foarte concis. Cred că este justificat să excludem dintr-o primă expunere succintă puncte care ar putea părea prea subtile, prea tehnice sau prea discutabile.

Raționamentul euristic care este provizoriu, doar plauzibil, este important în descoperirea soluției, dar el nu trebuie considerat drept demonstrație; trebuie să ghicim, să facem conjecturi, dar și *Analiza conjec-*

turilor noastre este necesară. Natura argumentărilor euristice este discutată în articolul *Indicii de progres*, însă discuția ar mai putea fi continuată.

Considerarea unor anumite scheme logice este importantă pentru subiectul nostru, dar am socotit că este recomandabil de a nu introduce un articol tehnic special. Există numai două articole consacrate cu precădere unor aspecte psihologice, anume *Fermitate, speranță, succes* și *Munca subconștientului*. Există o observație incidentală referitoare la psihologia animală; vezi *Reluarea problemei de la sfîrșit spre început*.

Am subliniat că problemele de orice gen, în particular *Problemele practice* și chiar *Enigmele și jocurile* intră în vederile euristicii. Am relevat, de asemenea, că o cercetare serioasă nu poate tinde să ajungă la *Reguli pentru a face descoperiri*, care să fie infailibile. Euristica se ocupă de comportarea omului în fața unei probleme; probabil că această chestiune a fost actuală de la începuturile societății umane, iar chintesența acestor străvechi discuții pare să ne fie păstrată de *Înțelepciunea proverbelor*.

4. Au fost incluse puține articole consacrate unor chestiuni particulare, iar anumite articole despre aspecte mai generale au fost expuse mai pe larg, deoarece ele sau părți ale lor ar putea prezenta un interes special pentru elevi sau profesori.

Există articole care discută chestiuni metodologice adesea importante în matematica elementară, ca *Pappus*, *Reluarea problemei de la sfîrșit spre început* (pe care l-am mai citat la 3), *Reducerea la absurd și demonstrația indirectă*, *Inducția și inducția matematică*, *Punerea în ecuație*, *Verificarea cu ajutorul dimensiunii* și *Cerost au demonstrațiile?* Cîteva articole se adresează într-un mod mai particular profesorilor, cum sînt *Probleme de rutină* și *Diagnostic*, iar altele au în vedere pe elevii ceva mai ambițioși decît media, de exemplu, *Omul inteligent, rezolvînd o problemă*, *Cititorul inteligent* și *Viitorul matematician*.

Se poate menționa aici că dialogurile dintre profesori și elevi, date la punctele **8, 10, 18, 19, 20** și în diverse articole ale „Dicționarului" pot servi ca model nu numai profesorului care încearcă să-și călăuzească clasa, ci și oricui lucrează individual la rezolvarea unor probleme. Descrierea gîndirii ca „discurs mintal", ca un fel de conversație a celui ce gîndește cu el însuși, nu este necorespunzătoare. Dialogurile menționate arată felul cum progresează soluționarea problemei; vorbind cu sine însuși, cel ce rezolvă probleme poate să progreseze după o linie similară.

5. Nu avem de gînd să epuizăm restul titlurilor; vom atrage atenția numai asupra cîtorva din ele.

Unele articole conțin observații despre istoria subiectului cărții, cum sînt *Descartes, Leibniz, Bolzano Euristica, Termenii vechi și noi* și *Pappus*, (acesta a mai fost citat la 4).

Cîteva articole explică termeni tehnici: *Condiție, Corolar, Lemă*.

Unele articole conțin numai trimiteri la alte paragrafe (ele sînt marcate cu * în Tabla de materii).

6. Euristica tinde către generalitate, către studiul unor metode independente de conținut și aplicabile la probleme de orice natură. Prezenta expunere citează însă aproape exclusiv ca exemple probleme de matematică elementară. Recunoaștem că aceasta îngustează cadrul expunerii, dar sperăm că această limitare nu împiedică în mod serios studiul euristicii. În adevăr, problemele de matematică elementară prezintă întreaga varietate dorită, iar studiul soluțiilor lor este deosebit de accesibil și de interesant. De asemenea, nu uităm niciodată problemele nematematice, deși le citățm mai rar ca exemple. Problemele de matematică mai complicate nu sînt niciodată citate direct, dar constituie fundalul real al expunerii noastre. Specialistul în matematică pe care-l interesează acest gen de studiu va putea să adauge cu ușurință exemple din propria sa experiență pentru a elucida punctele ilustrate aici prin exemple elementare.

7. Autorul ține să-și exprime recunoștința față de cîțiva autori moderni, care nu sînt citați în articolul consacrat *Euristicii*. Este vorba despre fizicianul și filozoful Ernst Mach, matematicianul Jacques Hadamard, psihologii William James și Wolfgang Köhler. El ține de asemenea, să citeze pe psihologul K. Duncker și pe matematicianul F. Krauss, a căror lucrare conține anumite elemente comune cu a noastră (această lucrare a fost publicată într-un moment cînd cercetarea de față era într-o fază foarte avansată și chiar parțial publicată).

Fermitate, speranță, succes. Ar fi o greșeală să ne închipuim că rezolvarea problemelor nu este decît o „chestiune intelectuală" și nimic mai mult; fermitatea și emoțiile noastre joacă un rol important. Hotărîrea nu prea fermă și acordul pasiv de a munci puțin pot fi suficiente pentru o problemă de rutină rezolvată în clasă. Însă rezolvarea unei probleme științifice serioase cere putere de voință, pe care să nu o poată frînge ani de muncă încordată și de decepții amare.

1. Fermitatea noastră depinde de speranța sau de descurajarea noastră, de satisfacția sau de dezamăgirea care ne stăpînesc la un moment dat. Este ușor să înaintăm atunci cînd ne închipuim că soluția este foarte aproape; dar este greu să perseverăm cînd nu vedem în fața noastră nici un drum care să ne scoată din dificultate. Sîntem stimulați cînd prevederea noastră se dovedește adevărată. Sîntem deprimați cînd calea pe care am urmat-o cu oarecare încredere este deodată blocată și fermitatea noastră zdruncinată.

Il n'est point besoin espérer pour entreprendre ni réussir pour persévérer, adică „Putem întreprinde ceva fără a spera și putem persevera fără a izbuti". Aceste cuvinte pot exprima o voință de nezdruncinat, onoare și simț al datoriei, ele pot fi deviza unui om cu simțăminte nobile, care luptă pentru o cauză dreaptă. Acest fel de fermitate nu este însă potrivit pentru omul de știință, care are nevoie de o oarecare speranță pentru a porni și de oarecare succes pentru a continua. Munca științifică presupune o îmbinare înțeleaptă a fermității noastre cu perspectivele care ni se deschid. Nu trebuie să vă apucați de o problemă, dacă ea nu prezintă un anumit interes; vă veți apuca serios de treabă, dacă problema pare instructivă; vă veți angaja cu întreaga personalitate, dacă promisiunile problemei sînt mari. După ce v-ați stabilit scopul, tindeți cu perseverență spre el, fără a vă crea însă dificultăți care nu sînt neapărat necesare. Nu disprețuiți succesele mici, dimpotrivă, căutați-le; *Dacă nu puteți să rezolvați problema propusă, încercați să rezolvați mai întîi o problemă înrudită.*

2. Dacă un elev face greșeli într-adevăr prostești sau are o înțelegere exasperant de lentă, cauza este aproape totdeauna aceeași; el nu are nici o dorință de a rezolva problema, nici de a o înțelege ca lumea și deci nu o înțelege. Profesorul care vrea în mod serios să-l ajute pe elev trebuie, de aceea, în primul rînd, să-i trezească curiozitatea, să-i insufle o oarecare dorință de a rezolva problema. De asemenea, profesorul trebuie

i dea elevului un anumit răgaz pentru ca să-și pună mintea în funcțiune, să se pregătească de lucru.

A-l învăța pe elev să rezolve probleme înseamnă a-i educa voința. Rezolvînd probleme care nu sînt prea ușoare pentru el, elevul învață să fie perseverent în ciuda insucceselor, să aprecieze realizările mărunte, să aștepte ideea esențială, să se concentreze asupra ei cu toate aptitudinile în momentul cînd a apărut. Dacă elevul nu are ocazia în școală să se familiarizeze cu diversele emoții ale luptei pentru rezolvarea unei probleme, educația sa matematică este nerealizată în punctul ei esențial.

Figurile nu constituie numai obiectul problemelor geometrice, ci și un important mijloc auxiliar pentru tot felul de probleme care nu cuprind inițial nimic geometric. Astfel, avem două motive temeinice pentru a ne ocupa de rolul figurilor în rezolvarea problemelor.

1. Dacă problema noastră este o problemă de geometrie, avem de considerat o figură. Ea poate fi în imaginația noastră sau desenată pe hîrtie. În anumite ocazii este de dorit să ne închipuim figura, fără a o desena. Dacă avem însă de examinat diferite detalii, unul după altul, este oportun *să facem un desen.* Dacă figura conține multe detalii, nu ni le putem imagina toate simultan, dar ele sînt toate împreună marcate pe hîrtie. Un detaliu zugrăvit în imaginația noastră poate fi uitat; însă unul desenat pe hîrtie rămîne și, cînd revenim la el, ne reamintește observațiile precedente, ne scutește de unele greutăți în rememorarea considerațiilor noastre anterioare.

2. Ne vom ocupa acum în mod special de rolul figurilor în problemele de construcții geometrice.

Începem analiza amănunțită a unei astfel de probleme, desenînd o figură care conține necunoscuta și datele, toate elementele fiind reunite în conformitate cu condiția problemei. Pentru a înțelege clar și distinct problema, trebuie să considerăm separat fiecare dată și fiecare parte a condiției; apoi reunim toate părțile și considerăm condiția în întregul ei, încercînd să vedem simultan diversele legături pe care le comportă problema. Cu greu am fi capabili să operăm cu toate aceste detalii, să le separăm și să le recombinăm, dacă nu am avea o figură desenată pe hîrtie.

Pe de altă parte, înainte de a fi rezolvat definitiv problema, este îndoielnic dacă o astfel de figură poate fi în genere desenată. Este oare posibil să satisfacem în întregime condiția

impusă de problemă? Nu sîntem în măsură să răspundem „da", înainte de a fi obținut soluția definitivă; totuși, începem prin a admite posibilitatea unei figuri în care necunoscuta este legată de date, așa cum prevede condiția. Face impresia că, desenînd figura, am recurs la o presupunere lipsită de justificare.

Dar nu este așa. Nu neapărat. Nu procedăm incorect atunci cînd, analizînd problema, considerăm *posibilitatea* existenței unui obiect care să satisfacă condiția impusă necunoscutei și care să aibă relațiile cerute cu toate datele, bineînțeles dacă nu confundăm posibilitatea cu certitudinea. Un judecător nu acționează incorect atunci cînd, interogîndu-l pe inculpat, are în vedere ipoteza că acesta putea să fi comis infracțiunea, cu condiția ca judecătorul să nu devină el însuși prizonierul acestei ipoteze. Atît matematicianul, cît și judecătorul pot considera fără pericol o posibilitate, dacă ei își amînă judecata definitivă pînă în momentul cînd cercetarea le-a furnizat un rezultat clar.

Metoda de a aborda analiza unei probleme de construcție prin desenarea unei schițe în care se presupune că a fost satisfăcută condiția, provine de la geometrii greci. Ideea acestei metode poate fi descoperită într-o propoziție scurtă și întrucîtva enigmatică a lui Pappus: *Considerăm ca fiind gata făcut ceea ce ni se cere să fie făcut.* Recomandarea următoare este mai puțin laconică, dar mai clară: *Desenează o figură ipotetică, în care se presupune că condiția problemei a fost satisfăcută în toate părțile ei.*

Este o recomandare pentru probleme de construcții geometrice, dar în fapt nimic nu ne silește să ne limităm la un gen de probleme atît de particulare. Putem extinde recomandarea la toate „problemele de aflat", enunțînd-o în următoarea formă generală: *Examinează situația ipotetică în care condiția problemei se presupune complet satisfăcută.*

Cf. *P a p p u s*, 6.

3. Să ne ocupăm acum de cîteva puncte privind desenarea efectivă a figurilor geometrice.

(I) Este oare cazul să desenăm figura exact sau aproximativ, cu instrumente sau cu mîna liberă?

Ambele tipuri de figuri își au avantajele lor. În principiu, figurile precise joacă în geometrie același rol ca măsurătorile precise în fizică; în practică însă, figurile exacte sînt mai puțin importante decît măsurările precise, deoarece teoremele geometriei pot fi verificate prin mijloace mult mai

largi decît legile fizicii. Totuși, începătorul trebuie să construiască multe figuri cît se poate de precis, pentru a-și face o bază experimentală sănătoasă; de asemenea, figurile precise pot sugera teoreme geometrice și elevilor mai avansați. Pentru nevoile raționamentului însă, figurile desenate îngrijit cu mîna liberă sînt, de obicei, destul de bune și ele se execută incomparabil mai repede. Natural, figura nu trebuie să aibă un aspect absurd; liniile presupuse drepte nu trebuie să arate ondulate, iar așa-numitele cercuri nu trebuie să semene cu un cartof.

O figură neîngrijită ne poate sugera cîteodată o concluzie falsă, însă pericolul nu este prea mare și ne putem feri de el prin diverse mijloace, în particular modificînd figura. Nu este nici o primejdie dacă ne concentrăm asupra legăturilor logice și ne dăm seama că figura este un auxiliar și nicidecum baza concluziilor noastre; baza reală o constituie legăturile logice.

[Acest punct este ilustrat în mod instructiv de anumite paradoxe binecunoscute, care exploatează cu pricepere inexactități intenționate ale unei figuri.]

(II) Este important ca elementele să fie reunite în relațiile cerute, dar nu importă în ce ordine le construim. De aceea, să alegem ordinea cea mai convenabilă. De exemplu, pentru a ilustra ideea trisecției, vrem să desenăm două unghiuri, α și β, astfel ca $\alpha = 3\beta$. Plecînd de la un α arbitrar, β nu poate fi construit cu rigla și compasul. De aceea, alegînd un β destul de mic, dar altfel arbitrar, plecăm de la el și construim pe α, ceea ce este ușor.

(III) Figura noastră nu trebuie să sugereze vreo particularizare neconvenabilă. Diversele părți ale figurii nu trebuie să prezinte relații aparente, pe care problema nu le cere. Segmentele nu trebuie să pară egale sau să fie perpendiculare, dacă ele nu sînt cu necesitate astfel. Triunghiurile nu trebuie să apară isoscele sau dreptunghice, dacă problema nu le impune această proprietate. Triunghiul cu unghiurile de 45°, 60° și 75° este cel care, în accepția cea mai proprie a cuvîntului, este cel mai „îndepărtat" atît de triunghiul isoscel, cît și de cel dreptunghic[1] . Desenăm acest triunghi, sau pe altul nu prea di-

[1] Dacă unghiurile unui triunghi sînt α, β, γ și $90° > \alpha > \beta > \gamma$, atunci cel puțin una dintre diferențele $90°-\alpha$, $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ este $<15°$, cu excepția cazului cînd $\alpha = 75°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. În adevăr,

$$\frac{3(90° - \alpha) + 2(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)}{6} = 15°.$$

ferit de el, dacă vrem să considerăm un triunghi „în general".

(IV) Pentru a sublinia diversele roluri pe care le joacă diferitele segmente, putem folosi linii mai groase și mai subțiri, continue sau întrerupte, sau linii de culori diferite. Desenăm o linie foarte subțire atunci cînd nu sîntem pe deplin hotărîți să o folosim ca linie auxiliară. Putem desena elementele date cu creionul roșu sau folosi alte culori pentru a accentua părțile importante, cum ar fi o pereche de triunghiuri asemenea etc.

(V) Pentru ilustrările geometriei în spațiu, este cazul să folosim modele tridimensionale, sau să facem desene pe hîrtie și pe tablă?

Modelele tridimensionale sînt oportune, însă greu de confecționat și costisitoare. De aceea, trebuie să ne mulțumim, de regulă, cu desene, deși nu este tocmai ușor să le facem expresive. Unele experimentări cu modele confecționate din carton sînt foarte recomandabile pentru începători. Este util să adoptăm ca reprezentări ale unor noțiuni geometrice obiecte din mediul nostru de toate zilele. Astfel, o cutie, o cărămidă sau clasa pot reprezenta un paralelipiped dreptunghic, creionul poate fi folosit ca model al unui cilindru circular, abajurul ca model al trunchiului de con circular drept etc.

4. Figurile trasate pe hîrtie sînt ușor de executat, ușor de recunoscut, ușor de memorat. Figurile plane ne sînt deosebit de familiare, iar problemele despre figuri plane ne sînt deosebit de accesibile. Putem obține avantaje din această împrejurare, putem face uz de priceperea noastră de a opera cu figuri, atunci cînd operăm cu obiecte negeometrice, dacă reușim să imaginăm o reprezentare geometrică potrivită pentru aceste obiecte negeometrice.

În adevăr, reprezentările geometrice, graficele și diagramele de toate felurile sînt folosite în toate științele, nu numai în fizică, în chimie și în celelalte științe ale naturii, ci și în economie și chiar în psihologie. Utilizînd o reprezentare geometrică adecvată, căutăm să exprimăm orice în limbajul figurilor, să reducem probleme de tot soiul la probleme geometrice.

Așadar, chiar dacă problema noastră nu este de geometrie, putem încerca *să facem un desen*. A găsi o reprezentare geometrică clară pentru o problemă negeometrică poate însemna un pas important pe calea spre soluție.

Generalizarea constă în trecerea de la considerarea unui obiect la considerarea unei mulțimi care conține acest obiect; sau în trecerea de la considerarea unei mulțimi mai mici la alta mai mare, care o conține pe prima.

1. Dacă, din întîmplare, întîlnim suma

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100,$$

ne putem da seama că ea este exprimabilă în forma curioasă

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Acum ne punem în mod firesc întrebarea: Se întîmplă oare frecvent ca o sumă de cuburi consecutive, ca

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3,$$

să fie un pătrat? Întrebîndu-ne astfel, generalizăm. Este o generalizare fericită; ea ne conduce de la o observație izolată la o lege generală remarcabilă. Numeroase rezultate au fost obținute prin generalizări fericite în matematică, în fizică și în celelalte științe ale naturii. Vezi *Inducția și Inducția matematică*.

2. Generalizarea poate fi utilă în rezolvarea problemelor. Să luăm următoarea problemă de geometrie în spațiu: „Se dau o dreaptă și un octaedru regulat. Să se găsească un plan care trece prin dreapta dată și taie octaedrul în două părți de volum egal". Problema poate părea dificilă, însă, în realitate, o cunoaștere destul de sumară a formei octaedrului regulat este suficientă pentru a ne sugera următoarea problemă mai generală: „Se dau o dreaptă și un *corp solid cu centru de simetrie*, care au o poziție fixă. Să se afle un plan care trece prin dreapta dată și împarte solidul în două părți echivalente". Natural, planul căutat trece prin centrul de simetrie al corpului și este determinat de acest punct și de dreapta dată. Întrucît octaedrul are centru de simetrie, problema noastră inițială este și ea rezolvată.

Cititorul va observa imediat că problema a doua este mai generală decît prima și, totuși, mult mai ușoară. În adevăr, realizarea noastră principală în rezolvarea primei probleme a constat în *a inventa a doua problemă*. Inventînd a doua problemă, ne-am dat seama de rolul centrului de simetrie; am *desprins* această proprietate a octaedrului care este esențială pentru rezolvarea problemei, anume că el are un centru de simetrie.

Problema mai generală poate fi mai uşor de rezolvat. Sună paradoxal, dar, după exemplul de mai sus, nu mai trebuie să ni se pară paradoxal. Principala realizare în rezolvarea problemei mai particulare a constat în a inventa problema generală. O dată această realizare principală obţinută, nu ne-a mai rămas decît o parte minoră a muncii. Aşadar, în cazul nostru, rezolvarea problemei generale nu este decît o parte minoră din rezolvarea celei particulare.

Vezi *Paradoxul inventatorului*.

3. „Să se afle volumul unui trunchi de piramidă cu baza pătrată, ştiind că latura bazei inferioare este de 10 m, latura bazei superioare de 5 m, iar înălţimea trunchiului de 6 m". Dacă în locul numerelor 10, 5, 6 vom pune litere, să zicem a,b,h, am generalizat. Obţinem o problemă mai generală decît cea iniţială, şi anume: „Să se afle volumul unui trunchi de piramidă cu baza pătrată, ştiind că latura bazei inferioare este a, latura bazei superioare b, iar înălţimea trunchiului h". O astfel de generalizare poate fi foarte utilă. Plecînd de la o problemă „cu numere" la alta „cu litere", căpătăm accesul la metode noi; putem varia datele şi, procedînd astfel, ne putem verifica rezultatele pe diverse căi. Vezi *Se poate verifica rezultatul?*, 2. *Modificări ale problemei*, 4.

Iată o problemă înrudită cu a noastră şi rezolvată anterior. Este o veste bună; o problemă a cărei soluţie este cunoscută şi care este legată de problema noastră actuală este cu siguranţă binevenită. Ea este cu atît mai bine venită, dacă legătura este strînsă şi soluţia simplă. Avem şanse mari ca o astfel de problemă să se dovedească utilă la rezolvarea problemei noastre actuale.

Situaţia pe care o discutăm aici este tipică şi importantă. Pentru a ne da limpede seama de aceasta, o vom compara cu situaţia în care ne aflăm cînd lucrăm la o problemă auxiliară. În ambele cazuri, scopul nostru este de a rezolva o problemă A, şi introducem şi considerăm o altă problemă B, în speranţa că vom profita pentru a rezolva problema noastră A, considerînd cealaltă problemă, B. Deosebirea constă în atitudinea noastră faţă de B. Aici am izbutit să ne reamintim de o problemă veche B, a cărei soluţie o cunoaştem, dar pe care nu ştim să o utilizăm acum. Dincolo, am izbutit să inventăm o nouă problemă B; ştim (sau, cel puţin, avem presupuneri puternice) cum să folosim pe B, dar nu ştim încă în ce fel s-o rezolvăm. Dificultatea noastră în privinţa lui B este singura deosebire dintre cele două situaţii. Odată ce am depăşit această dificultate, îl putem folosi pe B la fel în ambele cazuri; putem recurge la rezultat sau la metodă (cum se arată în *Probleme auxiliare*, 3) şi, dacă avem noroc, putem folosi atît rezultatul, cît şi metoda. În situaţia considerată aici, cunoaştem bine soluţia lui B, dar încă nu ştim cum s-o folosim. De aceea, punem întrebările: *Am putea să o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul? Am putea cumva să-i folosim metoda?*

Intenţia de a recurge la o anumită problemă rezolvată anterior influenţează felul în care înţelegem problema noastră actuală. Căutînd să legăm între ele cele două probleme, pe cea nouă şi pe cea veche, introducem în noua problemă elemente corespunzătoare unor elemente importante ale vechii probleme. De exemplu, problema noastră constă în a determina sfera circumscrisă unui tetraedru dat. Este o problemă de geometrie în spaţiu. Ne putem reaminti că am rezolvat înainte problema analogă din geometria plană, construind cercul circumscris unui triunghi dat. Apoi, ne reamintim că în vechea problemă, cea de geometrie plană, am utilizat perpendicularele pe mijloacele laturilor triunghiului. Este rezonabil să facem încercarea de a introduce ceva analog în problema noastră actuală. Astfel, putem fi conduşi să introducem în problema noastră actuală, ca elemente auxiliare omoloage, planurile perpendiculare prin mijloacele muchiilor tetraedrului. După ce ne-a venit această idee, putem duce la bun sfîrşit cu uşurinţă soluţia problemei de geometrie în spaţiu, urmînd soluţia analogă din geometria plană.

Exemplul de mai sus este tipic. Considerarea unei probleme înrudite şi rezolvate în trecut ne conduce la ideea de a introduce elemente auxiliare, iar introducerea unor elemente auxiliare adecvate ne dă posibilitatea de a utiliza cu toate avantajele problema înrudită în rezolvarea problemei noastre actuale. Avem în vedere un astfel de efect, atunci cînd, gîndindu-ne la întrebuinţarea posibilă a unei probleme înrudite şi rezolvate anterior, punem întrebarea: *Ar fi cazul să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*

Iată o teoremă înrudită cu a noastră şi demonstrată anterior. Această versiune a observaţiei discutate aici este ilustrată la pct. **19.**

Ideea revelatoare sau „ideea cea bună", sau „scînteia", „străfulgerarea" este o expresie uzuală care descrie un progres

brusc pe calea soluției; vezi *Progrese și reușită*, 6. Apariția unei idei revelatoare este familiară experienței oricui, însă dificilă de descris, astfel că este interesant să menționăm că o descriere foarte sugestivă a acestei idei a fost dată incidental de o autoritate atît de veche cum este Aristotel.

Mulți oameni vor fi de acord că a concepe o idee revelatoare este un „act de sagacitate" sau de perspicacitate. Aristotel definește sagacitatea după cum urmează: „Sagacitatea este descoperirea prin ghicire a legăturii esențiale într-un timp foarte scurt. De exemplu, dacă vezi pe cineva vorbind într-un anumit mod cu un om bogat, poți ghici de îndată că el încearcă să împrumute bani. Sau, observînd că partea luminată a Lunii este întotdeauna întoarsă spre Soare, poți înțelege dintr-o dată cauza; anume că Luna strălucește cu lumina reflectată de Soare"[1].

Primul exemplu nu este nepotrivit, dar destul de banal; nu este nevoie de prea multă sagacitate pentru a ghici astfel de lucruri despre oameni bogați și bani și ideea nu este tocmai strălucită. Dimpotrivă, al doilea exemplu este foarte impresionant, dacă facem un mic efort de imaginație, pentru a ne situa în epoca respectivă.

Trebuie să ne gîndim că un contemporan al lui Aristotel trebuia să se uite la Soare și la stele dacă voia să știe ora, deoarece nu existau ceasornice și trebuia să țină seama de fazele Lunii dacă dorea să călătorească noaptea, cînd drumurile nu erau luminate. El cunoștea cerul mai bine decît orășanul de astăzi, iar inteligența sa naturală nu era derutată de fragmente nedigerate ale prezentărilor teoriilor astronomice din ziare. El vedea Luna plină ca pe un disc plan, asemănător cu discul Soarelui, însă mult mai puțin strălucitor. El trebuia să se întrebe de ce se schimbă mereu forma și poziția Lunii. El observa din cînd în cînd Luna și în timpul zilei, cam pe la răsăritul și apusul Soarelui, și constata că „partea luminată a ei este totdeauna îndreptată spre Soare", ceea ce era ca atare, un rezultat remarcabil. După aceste observații își dă seama că diversele aspecte ale Lunii seamănă cu diversele aspecte ale unei mingi care este luminată dintr-o parte, astfel că o jumătate este strălucitoare, iar cealaltă semiobscură. El înțelege că Soarele și Luna nu sînt discuri plane, ci corpuri rotunde, dintre care unul dă lumina, iar celălalt o primește. El înțe-

[1] Textul este întrucîtva modificat. O traducere mai exactă în engleză este dată de William Whewell în *The Philosophy of the inductive Sciences*", (1847), vol. II, p. 131.

lege legătura esențială, își modifică de îndată concepția anterioară, „într-un timp foarte scurt", este o iluminare subită a imaginației, o idee revelatoare, o scînteie de geniu.

Indicii de progres. Pe cînd Columb și însoțitorii săi navigau spre vest pe oceanul necunoscut, ei se bucurau ori de cîte ori vedeau păsări. O pasăre era pentru ei un semn favorabil, care indica apropierea uscatului. Dar au fost de mai multe ori dezamăgiți. Au început să caute și alte semne. Și-au închipuit că algele plutitoare sau norii nu prea înalți puteau fi un indiciu al uscatului, au gustat însă din nou amărăciunea dezamăgirii. Dar într-o zi, indicii s-au înmulțit. Marți 11 octombrie 1492 „văzură nisipari și o trestie verde în apropierea corăbiei. Cei de pe caravela *Pinta* văzură o trestie și un băț și ridicară din apă un alt băț mic care părea lucrat cu fierul; de asemenea, o altă bucată de trestie, o plantă de uscat și o scîndurică. Echipajul caravelei *Niña* văzu și el semne ale uscatului, precum și o rămurică cu fructe. Răsuflară cu toții ușurați și se bucurară de aceste semne". Și în adevăr, a doua zi văzură pămînt, prima insulă a Lumii Noi.

Ceea ce facem poate fi important sau lipsit de importanță, problema noastră poate fi de orice natură dar — cînd muncim intens căutăm cu nerăbdare indicii de progres, după cum Columb și tovarășii săi căutau semne care să le vestească apropierea uscatului. Vom analiza cîteva exemple pentru a înțelege ce poate fi considerat în mod rezonabil drept un indiciu că ne apropiem de soluție.

1. *Exemple.* Am o problemă de șah. Trebuie să dau mat regele negru, să zicem în două mutări. Pe tabla de șah am regele alb, bunăoară la distanță de două mutări. De asemenea, un nebun alb la o distanță de regele negru, care pare inutil. Cum este mai bine să procedez? La început sînt nevoit să las întrebarea fără răspuns. Însă după diferite încercări dau peste o nouă mutare și observ că ea poate face ca nebunul alb, în aparență inutil, să intre în joc. Această observație îmi insuflă o nouă speranță. O privesc ca pe un indiciu favorabil: această nouă mutare are anumite șanse să fie cea bună. De ce?

Într-o problemă de șah bine construită nu există piese inutile. De aceea, trebuie să ținem seama de toate figurile de pe tablă. Trebuie *să utilizăm toate datele.* Soluția corectă trebuie cu siguranță să folosească toate piesele, chiar nebunul alb, în aparență inutil. În această privință, noua mutare pe care o iau în considerare concordă cu mutarea corectă pe care

o urmăresc. Noua mutare pare să fie cea corectă; ea poate să fie mutarea corectă.

Este interesant să considerăm o situaţie similară într-o problemă de matematică. Am de exprimat aria unui triunghi prin cele trei laturi a, b şi c. Mi-am făcut un fel de plan. Ştiu, mai mult sau mai puţin clar, ce relaţii geometrice trebuie să iau în considerare şi ce calcule să efectuez. Nu sînt însă sigur dacă planul meu se va dovedi bun. Dacă acum, urmînd linia prescrisă de planul meu, observ că

$$\sqrt{b + c - a}$$

intră în expresia ariei pe care vreau s-o obţin, am motive serioase să mă bucur. De ce?

În adevăr, trebuie luat în considerare că suma a două laturi ale unui triunghi este mai mare decît latura a treia. Aceasta impune o anumită restricţie. Cele trei lungimi date, a, b şi c, nu pot fi cu totul arbitrare; de exemplu, $b + c$ trebuie să fie mai mare decît a. Este o parte esenţială a condiţiei şi noi trebuie să *folosim întreaga condiţie*. Dacă $b + c$ nu este mai mare decît a, formula pe care o caut riscă să devină iluzorie. Acum, rădăcina pătrată de mai sus devine imaginară dacă $b + c - a$ este o cantitate negativă, adică dacă $b + c$ este mai mic decît a, şi deci rădăcina pătrată nu va mai fi potrivită să reprezinte o cantitate reală în exact aceleaşi circumstanţe în care expresia căutată riscă să devină iluzorie. Aşadar, formula mea, din care face parte rădăcina noastră pătrată, are o proprietate comună importantă cu formula corectă a ariei. Formula mea pare să fie cea adevărată; ea poate să fie formula adevărată.

Încă un exemplu. Cu cîtva timp în urmă voiam să demonstrez o teoremă de geometrie în spaţiu. Am găsit, fără prea multă greutate, o primă observaţie care părea corespunzătoare; pe urmă însă m-am încurcat. Îmi lipsea ceva pentru a termina demonstraţia. În ziua aceea, cînd am abandonat problema, aveam o idee mult mai clară decît la început despre felul cum trebuie să arate demonstraţia, despre felul cum trebuia împlinită lacuna; dar nu eram în stare s-o fac. A doua zi, după o noapte de odihnă, am reluat problema şi am găsit curînd o teoremă analogă din geometria plană. Subit am căpătat convingerea că am dat peste soluţie şi cred că aveam motive temeinice pentru a fi convins. De ce?

În adevăr, *analogia* este o călăuză importantă. Soluţia unei probleme de geometrie în spaţiu depinde adesea de o

problemă analogă din geometria plană (vezi *Analogia*, 3—7). Astfel, în cazul meu, exista de la început o şansă ca demonstraţia căutată să utilizeze ca lemă o teoremă din geometria plană, de felul celei care mi-a venit acum în minte. „Această teoremă pare să fie lema de care am nevoie; ea ar putea să fie lema pe care o caut", — acesta era raţionamentul meu.

Dacă Columb şi oamenii săi şi-ar fi luat osteneala să raţioneze explicit, ei ar fi raţionat într-un mod oarecum similar. Ei ştiau cum arată marea în apropierea ţărmului. Ei ştiau că în aer se văd mai des păsări care vin de pe uscat şi obiecte care plutesc în apă, iute de la mal, decît apar în largul mării. Mulţi membri ai echipajului observaseră cu siguranţă astfel de lucruri, cînd se reîntorceau din călătoriile precedente în portul de plecare. În ajunul memorabilei zile cînd în faţa lor a apărut insula San Salvador, cînd obiectele care pluteau în apă au devenit atît de frecvente, ei îşi ziseră: „Arată ca şi cum ne-am apropia de un ţărm: se poate că ne apropiem de un ţărm" şi răsuflară cu toţii uşuraţi şi se bucurară de aceste semne.

2. *Caracterul euristic al indiciilor de progres.* Să insistăm acum asupra unui punct care este, poate dinainte clar pentru oricine; dar el este foarte important şi, de aceea, trebuie să fie cu totul clar.

Tipul de raţionament pe care-l ilustrează exemplul de mai sus merită relevat şi luat în considerare cu seriozitate, deşi el nu conţine decît o indicaţie plauzibilă şi nu o certitudine absolută. Să enunţăm din nou, într-un mod pedant, *in extenso*, cu o amănunţime mai curînd nefirească, unul dintre aceste raţionamente:

Cînd ne apropiem de ţărm, vedem adesea păsări.

Acum vedem păsări.

Deci probabil, ne apropiem de pămînt.

Fără cuvîntul „probabil", concluzia ar fi total greşită. În adevăr, Columb şi însoţitorii săi văzuseră de mai multe ori păsări, dar fuseseră apoi dezamăgiţi. Numai o dată a venit ziua în care văzură nisipari, după care a urmat ziua descoperirii.

Cu cuvîntul „probabil", concluzia este rezonabilă şi naturală, dar nicidecum o dovadă, o concluzie demonstrativă; ea nu este decît o indicaţie, o sugestie euristică. Ar fi o mare eroare să uităm că o astfel de concluzie este doar probabilă şi să o considerăm certă. Dar ar fi o eroare şi mai mare dacă

am desconsidera cu totul o astfel de concluzie. Dacă veţi lua drept certă o concluzie euristică, vă veţi putea trezi induşi în eroare şi derutaţi; dacă însă neglijaţi cu totul concluziile euristice, nu veţi face nici un fel de progrese. Cele mai importante indicii de progres sînt euristice. Trebuie să le acordăm crezare? Trebuie să ne călăuzim după ele? Să le urmăm, dar cu ochii deschişi. Să ne încredem în ele, dar luîndu-ne măsuri de prevedere. Şi să nu renunţăm niciodată la judecata noastră.

3. *Indicii clar exprimabile.* Putem considera exemplele de mai sus şi dintr-un alt punct de vedere.

În unul dintre exemple, am socotit drept un semn favorabil că izbutisem să introducem în joc o dată înainte neutilizată (nebunul alb). Avem dreptate să privim lucrurile astfel. În adevăr, a rezolva o problemă înseamnă, în esenţă, *să găsim legătura dintre date şi necunoscută.* Mai mult, trebuie — cel puţin în problemele corect enunţate — *să utilizăm toate datele*, să punem pe fiecare dintre ele în relaţie cu necunoscuta. De aceea, a introduce încă o dată în joc înseamnă pentru noi, pe bună dreptate, un progres, un pas înainte.

Într-un alt exemplu, am considerat drept un indiciu favorabil că o clauză esenţială a condiţiei intervenea într-un mod adecvat în formula noastră. Aveam tot dreptul să vedem lucrurile astfel. În adevăr, *trebuie să folosim întreaga condiţie.* Aşadar, luînd în considerare încă o clauză a condiţiei, am intuit just că realizasem un progres, că înaintasem pe drumul cel bun.

În ultimul exemplu, am privit drept semn favorabil apariţia unei probleme analoge mai simple. Era de asemenea justificat. În adevăr, analogia este unul dintre principalele izvoare ale invenţiei. Cînd nu avem alte mijloace, căutăm *să imaginăm o problemă analogă.* De aceea, dacă o astfel de problemă apare spontan, de la sine, este firesc să ne bucurăm; simţim că ne apropiem de soluţie.

După aceste exemple putem prinde cu uşurinţă ideea generală. Există anumite operaţii mintale care sînt în mod tipic utile la rezolvarea problemelor. (Cele mai uzuale operaţii de acest fel sînt inventariate în cartea de faţă.) Dacă o astfel de operaţie tipică este încununată de succes (dacă încă o dată poate fi pusă în legătură cu necunoscuta, dacă se ia în seamă încă o clauză a condiţiei, dacă se introduce o problemă analogă mai simplă), succesul acesta îl resimţim ca pe un indiciu, ca pe un semn de progres. Odată ce am înţeles acest punct esenţial, putem exprima cu claritate şi natura altor indicii de

progres. Tot ce avem de făcut este să parcurgem lista, să ne uităm la diversele întrebări şi recomandări, considerîndu-le din noul nostru punct de vedere.

Aşadar, înţelegerea limpede a naturii necunoscutei înseamnă un progres. Aşezarea clară a diverselor date, în aşa fel încît să ne putem reaminti cu uşurinţă oricare dintre ele înseamnă un progres. A concepe într-un mod concret condiţia în întregul ei poate fi un important pas înainte; de asemenea, separarea condiţiei în părţi corespunzătoare poate fi un progres esenţial. Dacă am găsit o figură care poate fi uşor imaginată sau o notaţie care se reţine uşor, avem motiv să credem că am progresat întrucîtva. Rememorarea unei *probleme înrudite cu a noastră şi rezolvată anterior* poate fi un pas decisiv pe drumul cel bun.

Şi aşa mai departe. Fiecărei operaţii mintale clar concepute îi corespunde un anumit semn clar exprimabil. Lista noastră, citită în mod corespunzător, inventariază şi indiciile de progres.

Or, întrebările şi recomandările listei noastre sînt simple, evidente, ele se situează în sfera bunului-simţ. Am spus-o în repetate rînduri şi o putem spune despre indiciile de progres corespunzătoare, pe care le discutăm aici. Pentru a descifra astfel de indicii nu este nevoie de vreo ştiinţă ocultă, ci doar de puţin bun-simţ şi, firește, de o oarecare experienţă.

4. *Indicii mai puţin clar exprimabile.* Cînd lucrăm intens, simţim net măsura în care progresăm: ne bucurăm cînd progresul este rapid şi ne întristăm cînd este lent. Simţim destul de clar astfel de deosebiri, fără a fi în stare să punem în evidenţă vreun indiciu distinct. Stări de spirit, simţăminte, aspecte generale ale situaţiei ne servesc ca indicii ale progresului nostru. Ele nu sînt uşor de exprimat. Omul mai simplu îşi spune „Am impresia că este bine" sau „Mi se pare că nu prea merge". Oamenii mai culţi găsesc exprimări mai nuanţate: „Am aici un plan bine echilibrat" sau „Aici lipseşte ceva, şi-mi strică armonia". Însă în spatele acestor exprimări primitive sau vagi există un sentiment infailibil, pe care-l urmăm cu încredere şi care ne călăuzeşte adesea pe drumul cel bun. Dacă acest sentiment este foarte puternic şi apare subit, spunem că avem o inspiraţie. De obicei, oamenii nu-şi pot pune la îndoială inspiraţiile şi sînt cîteodată induşi în eroare de ele. În realitate, ar trebui să tratăm sentimentele şi inspiraţiile care ne călăuzesc exact cum tratăm indiciile de progres mai clar exprimabile, de care ne-am ocupat mai sus. Să le acordăm încredere, dar să fim cu ochii în patru.

Să ne urmăm totdeauna inspirația, păstrînd însă un grăunte de îndoială.

[Care este natura acestor sentimente călăuzitoare? Există oare vreun înțeles mai puțin vag care se ascunde în cuvinte cu nuanțe estetice ca „bine echilibrat" sau „armonios"? Sînt întrebări mai mult speculative decît practice, însă contextul nostru sugerează răspunsuri care merită poate să fie enunțate: O dată ce indicii de progres mai clar exprimabile sînt legate de succesul sau de eșecul vreunei operații mintale mai definite, sîntem în drept să presupunem că sentimentele noastre călăuzitoare mai puțin clar exprimabile ar putea fi legate într-un mod similar cu alte activități mintale, mai obscure, eventual cu activități a căror natură este mai curînd „psihologică" decît „logică"].

5. *Cum ne ajută indiciile.* Am un plan. Îmi dau cît se poate de limpede seama cu ce trebuie să încep și ce pași trebuie să fac mai întîi. Dar nu văd încă bine ce se află dincolo de drumul meu; nu sînt sigur de tot că planul meu va fi eficient; și, oricum, am de străbătut un drum lung. De aceea, pornesc cu precauție pe drumul indicat de planul meu și urmăresc cu atenție indiciile de progres. Dacă acestea sînt rare sau indistincte, încep să ezit. Și dacă ele nu apar un timp mai îndelungat, pot să-mi pierd curajul, să revin, și să încerc o altă cale. Dimpotrivă, dacă indiciile devin tot mai frecvente pe măsură ce înaintează, dacă se înmulțesc, ezitările mele scad, dispoziția mea devine mai bună și înaintez cu o încredere crescîndă, exact cum au făcut Columb și însoțitorii săi înainte de a avea în fața ochilor insula San Salvador.

Indiciile ne pot călăuzi acțiunile. Absența lor ne poate preveni de apropierea unui impas, economisindu-ne timp și eforturi inutile; prezența lor ne poate îndemna să ne concentrăm efortul asupra urmei celei bune.

Indiciile ne pot provoca însă și decepții. Am abandonat odată o anumită cale din cauza absenței indiciilor, însă, altul care a venit după mine și a urmat aceeași cale ceva mai departe, a ajuns la o descoperire importantă — spre marea mea supărare și îndelungatul meu regret. Nu numai că el a dovedit mai multă perseverență decît mine, dar a știut totodată să descifreze corect un anumit indiciu care îmi scăpase mie. Iarăși, pot urmări cu grijă o anumită cale, încurajat de indicii favorabile, și să ajung la un obstacol nebănuit și de netrecut.

Da, indiciile ne pot induce în eroare în cîte un caz special, dar ele ne călăuzesc corect în majoritatea cazurilor. Un

vînător poate interpreta greșit ici-colo urmele vînatului, dar el trebuie să procedeze just în majoritatea cazurilor, căci altfel el nu ar putea să trăiască din această meserie.

Interpretarea corectă a indiciilor cere o anumită experiență. Unii dintre tovarășii lui Columb știau, cu siguranță, din experiență cum arată marea în apropierea țărmului și, de aceea, ei au fost capabili să descifreze indiciile care le sugerau că uscatul este aproape. Un expert știe din experiență cum se prezintă situația și simte cînd soluția este aproape. De aceea, el este capabil să descifreze semnele care îi indică apropierea soluției. Expertul cunoaște mai multe indicii decît cel lipsit de experiență și le cunoaște mai bine; principalul său avantaj pare să consiste în aceste cunoștințe. Un vînător priceput observă urmele vînatului și-și dă seama chiar dacă sînt recente sau mai vechi, pe cînd omul lipsit de experiență nu știe să observe nimic.

Principalul avantaj al omului excepțional de talentat pare să consiste într-un fel de sensibilitate intelectuală deosebită. Cu o foarte fină sensibilitate, el sesizează subtilele indicii de progres sau își dă seama de absența lor, acolo unde altul mai puțin este incapabil să simtă vreo deosebire.

[6. *Silogismul euristic.* La pct. 2 am întîlnit un mod de raționament euristic care merită o analiză mai amănunțită și un termen tehnic. Vom începe prin a formula din nou după cum urmează acest raționament:

Cînd ne apropiem de țărm vedem adesea păsări.
Acum vedem păsări.

Deci, devine mai plauzibil că ne apropiem de țărm.

Cele două propoziții de deasupra liniei orizontale pot fi denumite *premise*, iar propoziția de dedesubtul liniei, *concluzie*. Întreaga schemă de raționament poate fi desemnată prin termenul de *silogism euristic*.

Premisele sînt enunțate aici în aceeași formă ca și la pct. 2, însă concluzia este exprimată cu mai multă grijă. O circumstanță esențială este mai bine pusă în evidență. Columb și oamenii săi au făcut de la început conjectura că, navigînd spre vest, vor da eventual de uscat; și ei trebuie să fi acordat oarecare credit acestei conjecturi, căci altfel nici nu ar fi pornit în călătorie. Pe drum, orice incident — major sau minor — ei l-au pus în legătură cu întrebarea lor dominantă: „Oare ne apropiem de uscat?" Încrederea lor

creştea sau scădea atunci cînd se întîmplau sau nu anumite evenimente şi credinţa fiecărui om oscila într-o măsură mai mare sau mai mică, în funcţie de fondul şi de caracterul lui. Întreaga tensiune dramatică a navigaţiei se datoreşte acestor fluctuaţii ale încrederii.

Silogismul euristic citat mai sus prezintă un motiv raţional pentru o schimbare a nivelului de încredere. Rolul principal al acestui gen de raţionament constă în a da ocazie unor astfel de schimbări şi acest punct este mai bine exprimat prin formularea de aici decît prin cea de la pct. 2.

Întreaga schemă sugerată de exemplul nostru poate fi prezentată astfel:

Dacă *A* este adevărat, atunci, după cum ştim, *B* este de asemenea adevărat.
Acum iese la iveală că *B* este adevărat.

Prin urmare, *A* devine mai plauzibil.

Sau mai scurt:

Dacă *A*, atunci *B*
B este adevărat

A este mai plauzibil

În această enunţare mai schematică, linia orizontală ţine locul expresiei „prin urmare" (sau „deci") şi exprimă implicaţia, legătura esenţială dintre premise şi concluzie.]

[7. *Natura raţionamentului plauzibil.* În această modestă carte discutăm o problemă filozofică. O discutăm cît putem de practic şi de neformal, fără a recurge, pe cît posibil, la moduri de expresie pretenţioase, dar subiectul nostru rămîne nu mai puţin filozofic. El are de-a face cu natura raţionamentului euristic şi, prin extensie, cu un gen de raţionament care este nedemonstrativ, însă important şi pe care, din lipsa unui termen mai lung, îl vom denumi *raţionament plauzibil.*

Indiciile sau semnele care-l conving pe inventator că ideea sa este bună, indicaţiile care ne călăuzesc în treburile noastre de toate zilele, probele indirecte ale juristului, demonstraţia inductivă a omului de ştiinţă, argumentarea statistică pe care o invocăm în subiecte numeroase şi variate sînt toate argumentări care concordă în două trăsături esenţiale. Întîi, ele nu prezintă certitudinea unei demonstraţii riguroase. Apoi, ele sînt utile în dobîndirea unor cunoştinţe

esenţialmente noi şi chiar indispensabile oricărei cunoştinţe care nu este pur matematică sau logică, oricărei cunoştinţe legate de lumea fizică. Am putea denumi raţionamentul care are la bază acest gen de argumentare „raţionament euristic" sau „raţionament inductiv" sau (dacă vrem să evităm o extindere a înţelesului unor termeni existenţi) „raţionament plauzibil". Vom adopta aici acest din urmă termen.

Silogismul euristic, introdus anterior, poate fi privit ca cea mai simplă şi mai răspîndită schemă a raţionamentului plauzibil. El ne reaminteşte o schemă clasică de raţionament demonstrativ, aşa-numitul *modus tollens* al silogismului ipotetic. Dăm aici, în paralel, ambele scheme:

Demonstrativ	*Euristic*
Dacă *A*, atunci *B*	Dacă *A*, atunci *B*
B este fals	*B* este adevărat
A fals	*A* mai plauzibil

Comparaţia acestor scheme poate fi instructivă. Ea ne oferă ocazia de a arunca o privire asupra naturii raţionamentului plauzibil (euristic, inductiv), ceea ce nu se face cu uşurinţă în alt mod.

Ambele scheme au aceeaşi premisă majoră:

Dacă *A*, atunci *B*.

Ele diferă la premisa minoră. Propoziţiile

B fals *B* adevărat

sînt una opusă celeilalte, însă au „o natură logică similară", ele se situează la acelaşi „nivel logic". Marea deosebire apare după premise. Concluziile

A fals *A* mai plauzibil

se situează la niveluri logice diferite, iar relaţiile lor cu premisele respective sînt de natură logică diferită.

Concluzia silogismului demonstrativ este de aceeaşi natură logică ca şi a premiselor. Mai mult, concluzia aceasta este complet exprimată şi sprijinită în întregime de premise. Dacă vecinul meu şi cu mine sîntem de acord să acceptăm premisele, nu putem, în mod rezonabil, să nu fim de acord în ceea ce priveşte acceptarea concluziei, oricît ar fi de diferite gusturile şi convingerile noastre.

Concluzia silogismului euristic se deosebește de premise prin natura ei logică; ea este mai vagă, mai puțin netă, nu atît de complet exprimată. Concluzia aceasta poate fi comparată cu o forță, ea are direcție și mărime. Ea ne îndreaptă într-o anumită direcție: A devine *mai* plauzibil. Și această concluzie are o anumită tărie: A poate să devină *mult mai* plauzibil sau *numai puțin mai* plauzibil. Concluzia nu este complet exprimată și nu este pe de-a-ntregul sprijinită de concluzii. *Direcția este exprimată și implicată de premise, pe cînd mărimea nu.* Pentru orice om rațional, premisele arată că A devine mai plauzibil (cu siguranță nu mai puțin plauzibil). Însă vecinul meu și cu mine putem în mod corect să nu fim de acord *cu cît* devine A mai plauzibil, întrucît temperamentul, fondul și alte motive pot să difere la noi.

În silogismul demonstrativ, premisele constituie o *bază completă* pe care se sprijină concluzia. Dacă ambele premise sînt valabile, concluzia este și ea valabilă. Dacă primim vreo nouă informație care nu schimbă credința noastră în premise, ea nu poate să schimbe nici credința noastră în concluzie.

În silogismul euristic, premisele sînt numai *o parte a bazei* pe care se sprijină concluzia, ele sînt partea complet exprimată, „vizibilă" a bazei; există și o parte neexprimată, invizibilă, formată din altceva, poate din sentimente indistincte sau din motivări neformulate. În adevăr, se poate întîmpla să căpătăm vreo nouă informație care lasă cu totul intactă încrederea noastră în ambele premise, dar influențează creditul pe care-l acordăm lui A, într-un mod diametral opus celui exprimat în concluzie. Este doar rezonabil să considerăm că A este mai plauzibil în virtutea premiselor silogismului nostru euristic. Mîine aș putea găsi motive care nu interferează de loc cu aceste premise și în virtutea cărora A apare mai puțin plauzibil sau chiar definitiv infirmat. Concluzia poate fi zdruncinată sau chiar total răsturnată de o zguduire produsă în partea invizibilă a fundamentului ei, deși premisele—partea vizibilă —rămîn neatinse.

Aceste observații par să facă ceva mai inteligibilă natura raționamentului euristic, inductiv și a celorlalte genuri de raționament plauzibil nedemonstrativ, care apar atît de derutant și de neclar cînd le abordăm din punctul de vedere al logicii pur demonstrative. Exemple mai concrete,

considerarea altor tipuri de silogism euristic și o cercetare asupra conceptului de probabilitate și asupra altor concepte înrudite, pare să fie necesară pentru a completa abordarea aleasă aici; cf. lucrarea autorului *Matematica și raționamentele plauzibile*.]

Raționamentele euristice sînt importante, deși nu dovedesc nimic. De asemenea, este important să ne clarificăm raționamentele euristice, deși în spatele fiecărui raționament clarificat există multe altele care rămîn obscure și care sînt uneori, poate și mai importante.

Inducția și inducția matematică. Inducția este procesul care constă în a descoperi legi generale prin observarea și combinarea unor circumstanțe particulare. Ea este folosită în toate științele, chiar și în matematică. Inducția matematică este utilizată numai în matematică, în demonstrarea unor teoreme de un gen anumit. Este destul de neplăcut că aceste două nume sînt legate între ele, deoarece între procesele respective, legătura logică este foarte slabă. Există totuși o anumită legătură practică; adesea recurgem concomitent la ambele metode. Vom ilustra amîndouă metodele prin același exemplu.

1. Am observat, din întîmplare, că

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100$$

și, recunoscînd cuburile și pătratul, putem da faptului observat forma mai interesantă

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2.$$

Cum se întîmplă așa ceva? Se întîmplă oare frecvent ca o astfel de sumă de cuburi consecutive să fie un pătrat?

Punîndu-ne această întrebare, sîntem asemenea naturalistului care, impresionat de o plantă interesantă sau de o formație geologică curioasă, pune o întrebare generală. Întrebarea noastră generală se referă la suma de cuburi consecutive

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

Am fost conduși aici de „faptul particular" $n = 4$.

Ce putem face pentru a răspunde la întrebarea noastră? Ceea ce face și naturalistul: putem cerceta alte cazuri speciale. Cazurile particulare $n = 2, 3$ sînt mai simple, cazul

următor este $n = 5$. Să adăugăm, pentru uniformitate și completitudine, cazul $n = 1$. Aranjînd frumos toate aceste cazuri, așa cum și-ar ordona un geolog probele dintr-un anumit mineral, obținem următorul tabel:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 = 1^2\\
1+8 &= 9 = 3^2\\
1+8+27 &= 36 = 6^2\\
1+8+27+64 &= 100 = 10^2\\
1+8+27+64+125 &= 225 = 15^2
\end{aligned}$$

Ne vine greu să credem că toate aceste sume de cuburi consecutive sînt pătrate din simplă întîmplare. Într-un caz similar, naturalistul nu s-ar prea îndoi că legea generală sugerată de cazurile particulare de mai sus este corectă; legea generală este demonstrată prin *inducție*. Matematicianul se exprimă cu mai multă rezervă deși, în fond, el gîndește, de obicei, în același fel. El va spune că următoarea teoremă este riguros sugerată de o inducție:

Suma primelor n cuburi este un pătrat.

2. Am fost conduși să conjecturăm o lege remarcabilă, întrucîtva misterioasă. De ce să fie pătrate aceste sume de cuburi consecutive? În aparență, însă, sînt pătrate.

Ce ar face naturalistul într-o astfel de situație? El și-ar examina conjectura. Procedînd astfel, el poate urma diverse linii de investigație. Naturalistul poate acumula, în continuare, probe experimentale; dacă vrem să facem la fel, trebuie să încercăm cazurile următoare, adică $n = 6,7,...$ Pe de altă parte, naturalistul poate reconsidera faptele a căror observare l-a condus la conjectura sa; el le confruntă cu grijă, caută să desprindă vreo regularitate mai profundă, vreo analogie mai strînsă. Vom urma și noi această linie de investigație.

Să reluăm cazurile $n = 1,2,3,4,5$, pe care le-am ordonat în tabelul nostru. De ce sînt toate aceste sume pătrate? Ce putem spune despre aceste pătrate? Bazele lor sînt 1, 3, 6, 10, 15. Ce este de spus despre aceste baze? Există oare vreo regularitate mai profundă, vreo analogie mai strînsă? Oricum ar fi, ele nu par să crească prea neregulat. Cum cresc? Diferența dintre doi termeni consecutivi ai acestui șir este și ea crescătoare:

$3 - 1 = 2, \quad 6 - 3 = 3, \quad 10 - 6 = 4, \quad 15 - 10 = 5.$

Aceste diferențe prezintă o regularitate evidentă. Putem constata aici o analogie surprinzătoare între bazele pătratelor, putem constata o regularitate remarcabilă la numerele 1, 3, 6, 10, 15:

$$\begin{aligned}
1 &= 1\\
3 &= 1+2\\
6 &= 1+2+3\\
10 &= 1+2+3+4\\
15 &= 1+2+3+4+5.
\end{aligned}$$

Dacă această regularitate este generală (și ne vine greu să credem contrariul), teorema pe care am bănuit-o ia o formă mai precisă:

Pentru $n = 1, 2, 3,...,$ *avem*

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 \ldots + n)^2.$$

3. Legea enunțată mai sus a fost descoperită prin inducție, iar maniera în care a fost descoperită ne sugerează despre inducție ideea că ea este în mod necesar unilaterală și imperfectă, dar nu falsifică faptele. Inducția încearcă să găsească regularitate și coerență în spatele observațiilor. Instrumentele ei cele mai cunoscute sînt generalizarea, particularizarea, analogia. Încercarea de generalizare are ca bază efortul de a înțelege faptele observate; ea se întemeiază pe analogie și este verificată prin alte cazuri particulare.

Ne vom abține de la alte observații referitoare la inducție, despre care există mari controverse între filozofi. Trebuie însă adăugat că numeroase rezultate din matematică au fost întîi descoperite prin inducție și abia pe urmă demonstrate. Matematica, prezentată într-un mod riguros, este o știință sistematic deductivă, însă matematica în devenire este o știință experimentală inductivă.

4. În matematică, la fel ca și în fizică, putem recurge la observație și la inducție pentru a descoperi legi generale. Există însă aici o deosebire. În fizică nu există autoritate mai mare decît observația și inducția, pe cînd în matematică există: demonstrația riguroasă.

După ce am lucrat experimental un timp, este recomandabil să ne schimbăm punctul de vedere. Să devenim riguroși. Am descoperit un rezultat interesant, însă raționamentul care ne-a condus era mai mult plauzibil, experimental, provizoriu, euristic; să încercăm acum să-l stabilim definitiv printr-o demonstrație riguroasă.

Am ajuns acum la o „problemă de demonstrat": să demonstrăm că rezultatul enunţat mai sus (la 2.) este adevărat sau fals.

Putem recurge la o mică simplificare. Ştim, eventual, că

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Oricum ar fi, aceasta se verifică uşor. Luăm un dreptunghi de laturi n şi $n + 1$, şi-l împărţim în două părţi egale

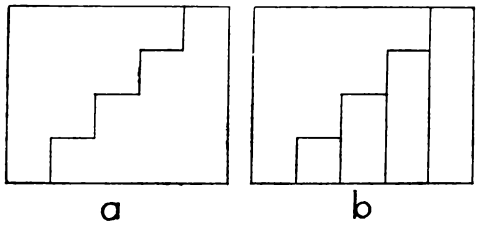

Fig. 15

printr-o linie în zigzag ca cea din fig. 15 a, care reprezintă cazul $n = 4$. Fiecare jumătate are o „formă de scară", iar aria ei are expresia $1 + 2 + \ldots + n$; pentru $n = 4$, avem $1 + 2 + 3 + 4$, vezi fig. 15 b. Întreaga arie a dreptunghiului este $n\,(n + 1)$, iar aria în formă de scară este jumătatea ei; am demonstrat astfel formula.

Putem transforma rezultatul găsit prin inducţie

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5. Dacă nu ştim cum să demonstrăm acest rezultat, ne putem mulţumi să-l verificăm prin încercări. Să verificăm primul caz de care încă nu ne-am ocupat, $n = 6$. Pentru această valoare, formula ne dă

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2$$

şi, calculînd, constatăm că formula este valabilă, deoarece ambele părţi sînt egale cu 441.

Putem verifica formula într-un mod mai eficient. După toate probabilităţile, formula este adevărată în general, adică este adevărată pentru toate valorile lui n. Rămîne ca oare valabilă şi atunci cînd trecem de la o valoare n la valoarea următoare, $n + 1$? Pe lîngă formula din pagina anterioară, vom obţine şi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

Avem acum un mijloc foarte uşor de verificare. Scăzînd de aici formula anterioară, avem

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Aceasta însă se verifică uşor. Membrul al doilea se poate scrie

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]^2 [(n+2)^2 - n^2] = \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 [n^2 + 4n + 4 - n^2]$$

$$\frac{(n+1)^2}{4}(4n+4) = (n+1)^2\,(n+1) = (n+1)^3.$$

Formula noastră descoperită experimental a trecut cu bine prin proba decisivă.

Să ne dăm seama clar ce înseamnă această verificare. Ne-am convins, fără posibilitate de îndoială, că

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Nu ştim încă dacă relaţia

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

este adevărată. Însă *dacă* ştiam că *este* adevărată, puteam trage concluzia, adunînd ecuaţia pe care am verificat-o fără posibilitate de îndoială, că

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

este *şi ea* adevărată, şi avem deci aceeaşi afirmaţie pentru întregul următor $n + 1$. Ştim însă precis că conjectura noastră este adevărată pentru $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. În virtutea celor arătate mai sus, conjectura, fiind adevărată pentru

$n = 6$, trebuie să fie adevărată și pentru $n = 7$; fiind adevărată pentru $n = 7$, este adevărată și pentru $n = 8$; fiind adevărată pentru $n = 8$, este adevărată pentru $n = 9$; și așa mai departe. Ea fiind valabilă pentru orice n, am demonstrat că este general adevărată.

6. Demonstrația de mai sus poate servi ca schemă în numeroase cazuri similare. Care sînt trăsăturile esențiale ale acestei scheme?

Aserțiunea pe care vrem s-o demonstrăm trebuie să fie dată dinainte, într-o formă precisă.

Aserțiunea trebuie să depindă de un număr întreg n.

Aserțiunea trebuie să fie suficient de „explicită", astfel încît să avem o anumită posibilitate de a verifica dacă ea rămîne adevărată atunci cînd trecem de la n la numărul întreg următor, $n + 1$.

Dacă reușim să verificăm aceasta în mod efectiv, putem, folosindu-ne experiența dobîndită în procesul verificării, să tragem concluzia că aserțiunea trebuie să fie adevărată pentru $n + 1$ dacă ea este adevărată pentru n. Odată ce am ajuns aici, este suficient să știm că aserțiunea este adevărată pentru $n = 1$; de unde rezultă că este adevărată pentru $n = 2$; de aici, pentru $n = 3$, și așa mai departe; trecînd de la un întreg la succesorul său, demonstrăm în mod general aserțiunea.

Acest proces este utilizat atît de frecvent, încît merită să-i dăm un nume. Noi i-am spune „demonstrație de la n la $n + 1$" sau, mai simplu, „trecerea la numărul întreg următor". Din nefericire, termenul tehnic unanim adoptat este „inducție matematică". Acest nume a apărut din întîmplare. Aserțiunea exactă pe care trebuie s-o demonstrăm poate proveni de oriunde iar izvorul ei este indiferent din punct de vedere logic. În multe cazuri însă, ca și în cel pe care l-am discutat amănunțit aici, izvorul este inducția, aserțiunea este descoperită experimental, și astfel demonstrația apare ca un complement matematic al inducției; aceasta este explicația denumirii.

7. Mai există un aspect, destul de subtil, însă important pentru oricine vrea să descopere singur demonstrații. În cele de mai sus am găsit două aserțiuni diferite, prin observație și inducție, una după cealaltă, prima la 1, iar a doua la 2; a doua era mai precisă decît prima. Lucrînd cu a doua aserțiune, am găsit posibilitatea de a verifica trecerea de la n la $n + 1$, și așa am izbutit să găsim o demonstrație prin „inducție matematică". Dacă am fi lucrat cu prima aserțiune, fără să cunoaștem precizarea adăugată de a doua, este puțin probabil să fi ajuns la o astfel de demonstrație. În adevăr, prima aserțiune este mai puțin precisă, mai puțin „explicită", mai puțin „palpabilă", mai puțin accesibilă încercărilor și verificărilor decît a doua. Trecînd de la prima la a doua, de la formularea mai puțin precisă la cea mai precisă am făcut un important pas pregătitor pentru demonstrația finală.

Această împrejurare prezintă un aspect paradoxal. Aserțiunea a doua este mai tare; ea implică direct pe prima, pe cînd prima aserțiune, întrucîtva „nebuloasă", poate cu greu să implice pe a doua, care este mai „netă". Așadar, teorema mai tare este mai ușor de stăpînit decît cea slabă; acesta este *Paradoxul inventatorului*.

Înțelepciunea proverbelor. Rezolvarea problemelor este o activitate umană fundamentală. În adevăr, partea majoră a gîndirii noastre conștiente are de-a face cu probleme. Dacă nu ne lăsăm pradă visărilor cu ochii deschiși, gîndurile noastre sînt orientate spre un anumit scop; căutăm mijloace, căutăm să rezolvăm o problemă.

Unii oameni izbutesc să-și atingă scopurile și să-și rezolve probleme, alții izbutesc mai puțin. Aceste deosebiri sînt observate, discutate și comentate, iar anumite proverbe par să fi păstrat esența acestor comentarii. În orice caz, există un mare număr de proverbe ce caracterizează în mod corespunzător procedurile tipice pe care le urmăm în rezolvarea problemelor, laturile bunului-simț care intervin aici, trucurile uzuale și erorile obișnuite. Proverbele conțin multe observații pătrunzătoare și subtile, însă, evident, nu trebuie să căutăm în ele un sistem științific neafectat de inconsistențe și de obscurități. Dimpotrivă, destul de multe proverbe pot fi puse față în față cu cîte un proverb care dă un sfat diametral opus, iar posibilitățile de interpretare sînt foarte largi. Ar fi o prostie să considerăm proverbele drept un izvor cu autoritate al unei înțelepciuni universal aplicabile, dar ar fi păcat să disprețuim descrierea plastică a procedeelor euristice, pe care ne-o oferă proverbele.

Ar fi o muncă interesantă să colecționăm și să grupăm proverbele referitoare la alcătuirea planului, căutarea mijloacelor și alegerea unei linii de acțiune dintre mai multe posibile, pe scurt, proverbele referitoare la rezolvarea problemelor. În cartea de față nu putem acorda proverbelor decît o mică parte din spațiul pe care l-ar merita; cel mai bun lucru pe care-l putem face este să citățm cîteva proverbe care ilus-

trează principalele faze ale rezolvării, relevate în lista noastră și discutate la pct. **6—14** și în alte locuri. Proverbele citate vor fi tipărite cu cursive.

1. Primul lucru pe care trebuie să-l facem pentru problema noastră este s-o înțelegem: *Cine înțelege greșit, răspunde greșit*[1] Trebuie să ne fie limpede scopul spre care tindem: *Înainte de a începe, gîndește-te la ceea ce urmărești*[2]. Este un sfat vechi; *Respice finem* (să ai în vedere sfîrșitul) spuneau latinii. Din nefericire, nu oricine ține seamă de acest sfat bun și oamenii încep adesea să facă presupuneri să acționeze și chiar să se agite pentru o treabă, înainte de a fi înțeles bine scopul pentru care trebuie să lucreze. *Nebunul ține seamă de început, înțeleptul se gîndește la ceea ce va fi*[3]. Dacă scopul nu este clarificat în mintea noastră, este ușor să ne abatem de la problemă și s-o pierdem cu totul din vedere. *Înțeleptul începe cu sfîrșitul, nebunul începe prin a sfîrși*[4].

Nu este însă destul să înțelegem problema; trebuie să fim, totodată, animați de dorința de a o rezolva. Nu avem șanse de a rezolva o problemă dificilă, dacă nu avem dorința puternică de a o rezolva, însă o astfel de dorință ne oferă o șansă. *Dacă există voință, se găsesc și mijloace*[5].

2. Întocmirea unui plan, conceperea ideii unei acțiuni adecvate constituie principala realizare în soluționarea unei probleme.

O idee bună este o fericire, o inspirație, un dar al zeilor, care trebuie meritat: *Sîrguința este mama norocului*[6]. *Perseverența ucide vînatul*[7]. *Un stejar nu poate fi doborît dintr-o singură lovitură*[8]. *Dacă nu izbutești prima dată, încearcă, încearcă din nou*[9]. Dar nu este suficient să încercăm în repetate rînduri, trebuie să încercăm cu mijloace diferite, să variem încercările. *Încearcă toate cheile, pentru a o găsi pe cea bună*[10]. *Săgețile se fac din mai multe soiuri de lemn*[11]. Încercările noastre trebuie să fie adaptate împrejurărilor. *Întoarce-ți pînzele după*

[1] Who understands ill, answers ill.
[2] Think on the end before you begin.
[3] A fool looks to the beginning, a wise man regards the end.
[4] A wise man begins in the end, a fool ends in the beginning.
[5] Where there is a will, there is a way.
[6] Diligence is the mother of good luck.
[7] Perseverance kills the game.
[8] An oak is not felled at one stroke.
[9] If at first you don't succeed, try try again.
[10] Try all the keys in the bunch.
[11] Arrows are made of all sorts of wood.

cum bate vîntul[1]. *Întinde-te cît ți-e plapuma*[2]. *Trebuie să facem ce putem, cînd nu putem face ceea ce vrem*[3] . Dacă am dat greș, trebuie să căutăm altceva. *Înțeleptul își schimbă gîndul, nebunul nu*[4] . Trebuie chiar, de la bun început, să fim pregătiți pentru un eventual eșec al schemei noastre și să dispunem de o schemă de rezervă. *E bine să ai două coarde la un arc*[5] .Cîteodată, facem exces de zel trecînd de la o schemă la alta și pierdem timp. În acest caz ne putem aminti de sfatul ironic: *Fă și refă, că ziua e lungă*[6]. Avem șanse să rătăcim mai puțin, dacă nu ne pierdem din vedere scopul. *Rostul pescuitului nu este să arunci undița, ci să prinzi pește*[7].

Ne străduim din greu să extragem ceva util din memoria noastră, dar destul de des se întîmplă să nu apreciem o idee care ar putea fi bună, pentru că ni se pare prea obișnuită. Expertul nu are, poate, mai multe idei decît cel lipsit de experiență, însă le apreciază mai mult pe cele pe care le are și le folosește mai bine. *Înțeleptul își creează mai multe posibilități decît i se oferă*[8]. *Înțeleptul își face unealtă din tot ce găsește la îndemînă*[9]. *Înțeleptul transformă întîmplarea în succes*[10]. Sau, eventual, avantajul expertului constă în faptul de a fi permanent în așteptarea unei ocazii. *Nu scăpa din vedere șansa cea mai importantă*".

3. Trebuie să începem realizarea planului nostru la momentul potrivit, cînd s-a maturizat, nu înainte. Nu trebuie să ne pripim. *Uită-te înainte de a sări*[12]. *Verifică, înainte de a te încrede*[13]. *Așteptarea înțeleaptă face ca drumul să devină sigur*[14]. Pe de altă parte, nu trebuie să șovăim prea mult. *Dacă vrei să navighezi fără pericol, nu porni pe mare*[15]. *Procedează cum e mai potrivit și speră că totul va ieși bine*[16].

[1] As the wind blows you must set your sail.
[2] Cut your coat according to the cloth.
[3] We must do as we may if we can't do as we would.
[4] A wise man changes his mind, a fool never does.
[5] Have two strings to your bow.
[6] Do and undo, the day is long enough.
[7] The end of fishing is not angling but catching.
[8] A wise man will make more opportunities than he finds.
[9] A wise man will make tools of what comes to hand.
[10] A wise man turns chance into good fortune.
[11] Have an eye to the main chance.
[12] Look before you leap.
[13] Try before you trust.
[14] A wise delay makes the road safe.
[15] If you will sail without danger you must never put to sea.
[16] Do the likeliest and hope the best.

Trebuie să facem uz de judecată ca să stabilim momentul potrivit. Şi aici există un avertisment oportun, care ne indică greşeala cea mai comună, cea mai obişnuită a judecăţii noastre: *Ne place să credem că dorinţele noastre sînt realitatea*[1].

De obicei, planul nostru ne dă doar o linie de conduită generală. Trebuie să ne convingem că detaliile se încadrează în această linie şi deci trebuie să le examinăm cu grijă, unul după altul. *Scara se urcă treaptă cu treaptă*[2]. *Încetul cu încetul se face oţetul*[3]. *Rezolvă lucrurile rînd pe rînd*[4].

Cînd ne realizăm planul, trebuie să avem grijă de a ordona cum se cuvine diversii săi paşi, ceea ce înseamnă, de cele mai multe ori, să-i dispunem în ordinea inversă a invenţiei. *Ceea ce nebunul face la sfîrşit, înţeleptul face la început*[5].

4. Privirea retrospectivă asupra soluţiei complete este o fază importantă şi instructivă a muncii. *Cine nu gîndeşte din nou, nu poate gîndi bine*[6]. *Gîndul din urmă este cel mai bun*[7].

Examinînd din nou soluţia, putem descoperi o nouă confirmare a rezultatului. Trebuie arătat începătorului că o astfel de confirmare în plus este valoroasă, că două dovezi sînt mai bune decît una singură. *Este mai sigur să navighezi cu două ancore*[8].

5. N-am epuizat nicidecum proverbele şi comentariile referitoare la soluţionarea problemelor. Dar nu credem că dacă am cita şi alte proverbe, ele ar furniza teme noi, ci doar variaţii la cele deja menţionate. Aspectele mai sistematice şi mai fine ale procesului de rezolvare a problemelor nu prea intră în sfera înţelepciunii proverbelor.

Descriind aspectele mai sistematice ale soluţionării problemelor, autorul a încercat, ici-colo, să imite stilul particular al proverbelor, ceea ce nu este uşor. Urmează acum cîteva proverbe „sintetice", descriind unele atitudini mai subtile.

Scopul ne sugerează mijloacele.

Cei mai buni prieteni pe care-i avem sînt Ce, De ce, Unde, Cînd şi Cum. Întrebaţi-l pe Ce, întrebaţi-l pe De ce, adresaţi-vă lui Unde, Cînd şi Cum, dacă aveţi nevoie de un sfat, şi nu mai recurgeţi la nimeni altul.

[1] We soon believe what we desire.
[2] Step after step the ladder is ascended.
[3] Little by little as the cat ate the fickle.
[4] Do it by degrees.
[5] What a fool does at last, a wise man does at first.
[6] He thinks not well that thinks not again.
[7] Second thoughts are best.
[8] It is safe riding at two anchors.

Nu crede nimic fără să te îndoieşti, dar pune la îndoială numai ceea ce merită pus la îndoială.

Priveşte în jur cînd ai găsit prima ciupercă sau cînd ai făcut prima descoperire; ele cresc în grupuri.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646—1716), mare matematician şi filozof, a intenţionat să scrie o *Artă a invenţiei*, dar nu şi-a realizat niciodată planul. Numeroase fragmente risipite în operele sale ne arată însă că Leibniz a avut idei interesante, asupra temei a cărei importanţă a subliniat-o adesea. Astfel, el scrie: „Nimic nu este mai important decît să ne dăm seama care sînt izvoarele invenţiei, iar acestea, după părerea mea, sînt mai interesante decît invenţiile înseşi".

Lema este o „teoremă auxiliară". Cuvîntul este de origine greacă; o traducere mai fidelă ar fi „ceea ce se presupune" sau „ceea ce se admite".

Încercăm să demonstrăm, bunăoară, teorema A. Ajungem la gîndul că există o altă teoremă, să zicem B; dacă B s-ar dovedi adevărată, am putea, poate, folosind-o, să demonstrăm pe A. Admitem provizoriu pe B, amînînd demonstraţia ei, şi continuăm, demonstrînd teorema A. O astfel de teoremă B este presupusă, admisă şi apare ca teoremă auxiliară a teoremei iniţiale A. Mica noastră relatare este destul de tipică şi explică înţelesul cuvîntului „lemă".

Modificări ale problemei. O insectă încearcă să iasă prin geam, repetă mereu această încercare fără speranţă, şi nu încearcă să o facă prin geamul alăturat care este deschis şi prin care a pătruns în cameră. Şoarecele acţionează mai inteligent; prins în capcană, el încearcă să se strecoare printre două bare, apoi printre următoarele două bare, apoi printre alte două; el îşi variază încercările, explorează posibilităţi variate. Omul este capabil sau ar trebui să fie capabil de a-şi varia încercările într-un mod şi mai inteligent, de a explora cu mai multă înţelegere diversele posibilităţi de a învăţa din erorile şi din lipsurile sale. „Încearcă, încearcă mereu", spune un proverb popular. Este un sfat bun. Insecta, şoarecele şi omul îl urmează; dar dacă unul îl urmează cu mai mult succes decît ceilalţi, aceasta se explică prin faptul că el îşi *modifică problema* într-un mod mai inteligent.

1. Cînd am ajuns la sfîrşitul muncii noastre, obţinînd soluţia, concepţia noastră asupra problemei este mai completă

și mai adecvată decît era la început. Dacă vrem să trecem de la concepția noastră inițială asupra problemei la o concepție mai adecvată, mai bine adaptată, încercăm diverse puncte de vedere și privim problema sub diferite aspecte.

Succesul în rezolvarea problemei depinde de alegerea aspectului corespunzător, de atacarea fortăreței în partea unde este accesibilă. Cînd vrem să găsim aspectul cel corespunzător, latura accesibilă, încercăm diferite laturi și aspecte, *modificăm, variem problema.*

2. Modificarea problemei este ceva esențial. Este un fapt care poate fi explicat pe diverse căi. Astfel, dintr-un anumit punct de vedere, progresul în rezolvarea problemei apare ca mobilizare și organizare a unor cunoștințe dobîndite anterior. Trebuie să extragem din memorie și să introducem în problemă anumite elemente. Modificînd problema, ne ușurăm extragerea unor astfel de elemente. Cum?

Ne reamintim lucrurile printr-un fel de „acțiune de contact", denumită „asociație"; ceea ce avem acum în minte tinde să ne reamintească ceva cu care a fost în contact la vreo ocazie din trecut. (Nu avem nici locul, nici nevoie să expunem mai clar teoria asociației sau să-i discutăm limitările.) *Modificînd problema*, introducem puncte noi și creăm astfel contacte noi, posibilități noi de a pune în contact elemente relevante pentru problema noastră.

3. Nu putem spera să rezolvăm fără o concentrare intensă o problemă serioasă. Dar, concentrîndu-ne cu intensitate atenția asupra unui anumit punct, obosim repede. Pentru a ne menține atenția trează, trebuie să schimbăm mereu obiectul spre care o îndreptăm.

Dacă lucrarea noastră progresează, înseamnă că avem ceva de făcut, că apar noi puncte de examinat, atenția noastră este ocupată, interesul nostru rămîne viu. Dacă însă nu progresăm, atenția noastră devine șovăielnică, interesul scade, problema începe să ne obosească, gîndurile noastre o iau razna și sîntem în pericol să pierdem cu totul problema din vedere. Pentru a scăpa de acest pericol, trebuie să *ne punem singuri o nouă întrebare* despre problemă.

Întrebarea cea nouă dezvăluie posibilități încă neîncercate de a stabili contactul cu cunoștințe anterioare, reînvie speranța noastră de a stabili contacte utile. Noua întrebare *ne recucerește interesul prin modificarea problemei*, arătîndu-ne un nou aspect al ei.

4. *Exemplu.* Să se afle volumul unui trunchi de piramidă cu baza pătrată, cunoscîndu-se latura a a bazei inferioare, latura b a bazei superioare și înălțimea h a trunchiului.

Problema poate fi pusă unei clase care cunoaște formulele pentru volumul prismei și al piramidei. Dacă elevii nu reușesc să progreseze pe baza vreunei idei proprii, profesorul poate începe prin *a varia datele* problemei. Începem cu un trunchi pentru care $a > b$. Ce se întîmplă dacă b crește, pînă devine egal cu a? Trunchiul devine o prismă, iar volumul va lua valoarea a^2h. Ce se întîmplă dacă b descrește pînă devine egal cu zero? Trunchiul se transformă într-o piramidă, iar volumul devine $a^2h/3$.

Variația datelor contribuie, în primul rînd, să mențină interesul pentru problemă. Apoi, ea ne poate sugera să folosim, într-un fel sau într-altul, rezultatele citate privitor la prismă și la piramidă. Oricum ar fi, am obținut proprietăți definite ale rezultatului final; formula finală trebuie să fie de așa natură, încît să se reducă la a^2h pentru $b = a$ și la $a^2h/3$ pentru $b = 0$. Este un avantaj cînd putem prevedea proprietăți ale rezultatului pe care îl căutăm. Astfel de proprietăți pot da sugestii valabile și, în orice caz, după ce am găsit formula finală avem posibilitatea de a o verifica. Avem astfel, dinainte, un răspuns la întrebarea: *Se poate verifica rezultatul?* (vezi acest articol, la 2).

5. *Exemplu.* Să se construiască un trapez de laturi a, b, c, d date.

Fie a baza inferioară și c baza superioară; a și c sînt paralele

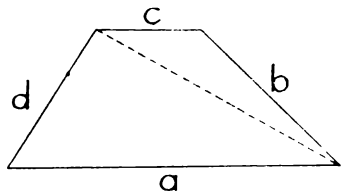

Fig. 16

și inegale, b și d nu sînt paralele. Dacă nu dispunem de vreo altă idee, putem începe prin a varia datele.

Începem cu un trapez în care $a > c$. Ce se întîmplă dacă c descrește pînă devine egal cu zero? Trapezul degenerează

într-un triunghi. Însă triunghiul este o figură cunoscută și simplă, pe care o putem construi pe baza a tot felul de date. S-ar putea ca introducerea în figură a acestui triunghi să fie avantajoasă. Procedăm în consecință, desenînd un singur segment auxiliar, o diagonală a trapezului (fig. 16). Examinînd triunghiul, constatăm însă că el nu prea poate să ne fie de folos; cunoaștem două laturi, a și d, dar avem nevoie de trei date.

Să încercăm altceva. Ce se întîmplă dacă c crește pînă

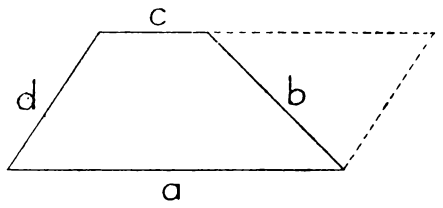

Fig. 17

devine egal cu a? Trapezul devine paralelogram. Putem folosi această ipoteză? O mică analiză (vezi fig. 17) ne îndreaptă atenția spre triunghiul adăugat la trapezul inițial, atunci cînd desenăm paralelogramul. Acest triunghi se construiește ușor, căci avem trei date, cele trei laturi b, d și $a-c$.

Variind problema inițială (construcția unui trapez) am fost conduși la o problemă auxiliară mai accesibilă (construcția unui triunghi). Utilizînd rezultatul problemei auxiliare, rezolvăm ușor problema inițială (nu avem decît să completăm paralelogramul).

Exemplul nostru este tipic. De asemenea, este tipic că prima noastră încercare a eșuat. Privind-o retrospectiv, ne putem da seama însă că această primă încercare nu a fost chiar lipsită de folos. Ea cuprinde o anumită idee; în particular, ea ne-a dat ocazia să ne gîndim la construcția unui triunghi, ca mijloc care ne conduce la scop. În adevăr, am ajuns la încercarea a doua, cea încununată de succes, modificînd prima încercare, care a fost un eșec. L-am făcut pe c să varieze; întîi am încercat să-l micșorăm, apoi să-l mărim.

6. La fel ca în exemplul de mai sus, trebuie adesea să încercăm diverse variante ale problemei. Trebuie să o modificăm, să o reenunțăm, s-o transformăm mereu pînă cînd reușim

eventual să găsim ceva util. Putem învăța din greșeli; o încercare eșuată poate cuprinde cîte o idee bună și putem ajunge la o încercare reușită, *modificînd* una nereușită. Ceea ce obținem după variate încercări este, de multe ori, ca și în exemplul precedent, o problemă auxiliară mai accesibilă.

7. Există anumite modalități de a varia problema, care sînt aproape totdeauna utile, ca de exemplu revenirea la *Definiție*, *Descompunerea și recombinarea*, introducerea unor *Elemente auxiliare*, *Generalizarea*, *Particularizarea* și folosirea *Analogiei*.

8. Ceea ce am spus mai sus (la 3) despre întrebările noi, capabile să ne recucerească interesul, este important pentru întrebuințarea adecvată a listei noastre.

Profesorul poate folosi lista pentru a-și ajuta elevii. Dacă elevul progresează, el nu are nevoie de ajutor și profesorul nu trebuie să-i pună nici o întrebare, lăsîndu-l să lucreze singur, ceea ce, evident, este preferabil pentru independența elevului. Dar profesorul trebuie, natural, să facă încercarea de a găsi vreo întrebare sau recomandare potrivită pentru a-l ajuta pe elev atunci cînd se încurcă. Căci atunci apare pericolul ca problema să-l obosească pe elev, care o va părăsi sau își va pierde interesul și va face o greșeală stupidă, acum cînd problema i-a devenit indiferentă.

Putem folosi lista pentru a rezolva propriile noastre probleme. Pentru a o utiliza într-un mod adecvat, procedăm ca în cazul anterior. Dacă progresăm în mod satisfăcător, dacă noi observații apar spontan, ar fi de-a dreptul o prostie să împiedicăm această înaintare spontană prin tot felul de întrebări inutile. Dacă însă ne oprim, dacă nu ne mai vine nimic în gînd, apare pericolul să ne plictisim de problemă. Atunci este timpul să căutăm vreo idee generală care să se arate utilă, o întrebare sau o recomandare potrivită din listă. Și orice întrebare este binevenită dacă ea implică șansa de a ne îndrepta spre un nou aspect al problemei; aceasta ne poate recuceri interesul, ne poate face să ne continuăm munca și reflecțiile.

Munca subconștientului. Într-o seară, voiam să discut cu un prieten despre un anumit scriitor, dar nu izbuteam să-mi reamintesc numele lui. Era supărător, cu atît mai mult cu cît țineam foarte bine minte una dintre povestirile sale. De asemenea, îmi aminteam de o întîmplare cu scriitorul, pe

care voiam să o relatez; în fapt, țineam minte totul, în afară de nume. Am încercat în repetate rînduri să-mi reamintesc numele, însă zadarnic. A doua zi dimineața, deîndată ce m-am gîndit la supărarea din seara trecută, numele mi-a revenit în minte fără nici un efort.

Cu siguranță că cititorul își reamintește o întîmplare similară, în care chiar el a jucat rolul principal. Și dacă este pasionat de rezolvarea problemelor, a avut probabil experiențe asemănătoare și cu probleme. Se întîmplă adesea că nu aveți nici un succes la o problemă; munciți din greu și nu găsiți nimic. Dar, revenind la problemă după ce v-ați odihnit noaptea sau după ce ați lăsat-o deoparte cîteva zile, apare o idee revelatoare și o rezolvați cu ușurință. Natura problemei este aici destul de indiferentă; un cuvînt uitat, un punct mai dificil dintr-un joc de cuvinte încrucișate, începutul unei scrisori neplăcute sau soluția unei probleme de matematică pot să apară pe această cale.

Întîmplările de acest fel ne dau impresia că ar fi vorba despre *munca subconștientului*. Fapt este că, după o absență îndelungată, o problemă poate să reapară în conștiința noastră, clarificată în mod esențial, mult mai apropiată de soluție decît atunci cînd a dispărut din conștiința noastră. Cine a elucidat-o, cine a adus-o mai aproape de soluție? Evident, noi înșine, lucrînd la ea *subconștient*. Este greu să dăm aici un alt răspuns; de altfel, psihologii au descoperit elemente ale unui alt răspuns care s-ar putea dovedi pînă la urmă mai satisfăcător.

Oricare ar fi sau n-ar fi meritele teoriei muncii subconștientului, este sigur că există o limită, dincolo de care nu trebuie să supunem la eforturi gîndirea noastră. Există anumite momente cînd este preferabil să lăsăm problema pentru un timp. *Noaptea este un sfetnic bun*, spune un vechi proverb. Acordînd un timp de odihnă problemei și nouă înșine, s-ar putea ca mîine să realizăm mai mult și cu un efort mai mic. *Dacă nu merge astăzi, mîine poate va merge*, spune un alt vechi proverb. Dar este de dorit să nu lăsăm deoparte o problemă la care vrem să revenim mai tîrziu, înainte de a avea impresia că am realizat cîte ceva; cel puțin, un mic punct ar trebui să fie stabilit, vreun aspect al problemei întrucîtva elucidat, atunci cînd întrerupem lucrarea.

După întrerupere apar mai clare numai problemele a căror soluție am dorit-o din tot sufletul sau la care am muncit cu multă pasiune; se pare că pentru a pune în funcțiune subconștientul, este nevoie de un efort și de pasiune din partea conștiinței. În caz contrar, ar fi foarte ușor; am putea rezolva probleme dificile, dormind și așteptînd să ne vină ideea revelatoare.

În vremurile trecute, o idee bună, apărută brusc, era privită ca o inspirație, ca un dar al zeilor. Un astfel de dar trebuie meritat prin muncă sau cel puțin printr-o dorință pasionată[1].

Notațiile. Dacă vreți să vă dați seama de avantajele unor notații bine alese și binecunoscute, încercați să adunați cîteva numere, nu prea mici, punînd condiția că nu aveți voie să folosiți cifrele arabe obișnuite, deși puteți recurge, dacă vreți, la cifre romane. Să luăm, bunăoară, numerele MMMXC, MDXCVI, MDCXLVI, MDCCLXXXI, MDCCCLXXXVII.

Importanța notațiilor matematice poate fi cu greu supraapreciată. Calculatorii de astăzi, care folosesc scrierea zecimală, au un mare avantaj față de calculatorii din trecut, care nu aveau o metodă atît de comodă de a scrie numerele. Un student mijlociu din zilele noastre, familiarizat cu notațiile moderne din algebră, geometrie analitică și calcul diferențial și integral, are un imens avantaj față de un matematician din Grecia antică, în ceea ce privește rezolvarea problemelor cu arii și volume, asupra cărora s-a exersat geniul lui Arhimede.

1. Vorbirea și gîndirea sînt strîns legate între ele, iar folosirea cuvintelor ne ajută să gîndim. Unii filozofi și filologi au mers și mai departe, susținînd că utilizarea cuvintelor este indispensabilă pentru utilizarea rațiunii.

Această din urmă afirmație este însă oarecum exagerată. Dacă avem puțină experiență de muncă matematică serioasă, ne dăm seama că putem desfășura o muncă intelectuală apreciabilă, fără a folosi nici un fel de cuvinte, ci doar examinînd figuri geometrice sau operînd cu simboluri algebrice. Figurile și simbolurile sînt strîns legate de gîndirea matematică, utilizarea lor este un ajutor pentru mintea noastră. Am putea preciza afirmația oarecum îngustă a filozofilor și a filologilor, asimilînd cuvintele cu celelalte feluri de semne și spunînd că *folosirea semnelor pare să fie indispensabilă pentru folosirea rațiunii*.

Oricum ar fi, folosirea simbolurilor matematice este similară cu utilizarea cuvintelor. Notațiile matematice apar ca

[1] O discuție completă a problemei „gîndirii inconștiente", vezi la Jacques Hadamard, *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*.

un fel de limbaj, *une langue bien faite* „o limbă bine făcută" adică un limbaj bine adaptat scopului său, concis și precis, cu reguli care — spre deosebire de cele ale gramaticii obișnuite — nu admit nici o excepție.

Dacă acceptăm acest punct de vedere, *Punerea în ecuație* apare ca un fel de traducere, o traducere din limbajul obișnuit, în limbajul simbolurilor matematice.

2. Simboluri matematice, ca $+$, $-$, $=$ și multe altele, au o semnificație fixată prin tradiție, în timp ce altele, cum ar fi minusculele și majusculele alfabetului latin și grec, sînt folosite cu un sens diferit în probleme diferite. Cînd avem în față o problemă nouă, trebuie să alegem anumite simboluri, *să introducem notații corespunzătoare*. Avem aici ceva analog cu folosirea limbii obișnuite. Multe cuvinte sînt folosite cu înțelesuri diferite în contexte diferite; atunci cînd precizia este importantă, trebuie să ne alegem cuvintele cu toată grija.

Un pas important în rezolvarea unei probleme este alegerea notațiilor. Aceasta trebuie făcută cu grijă. Timpul pe care-l cheltuim acum cu alegerea notațiilor poate fi compensat cu prisosință de timpul pe care-l vom economisi mai tîrziu, evitînd confuziile și ezitările. Mai mult, alegîndu-ne cu grijă notațiile, trebuie să ne gîndim clar la elementele problemei pe care le notăm. Astfel, alegerea unor notații corespunzătoare poate aduce o contribuție esențială la înțelegerea problemei.

3. O notație bună trebuie să fie inechivocă, pregnantă, ușor de ținut minte; ea trebuie să excludă semnificații secundare periculoase și să utilizeze cu profit semnificațiile secundare utile. Ordinea și legătura dintre semne trebuie să sugereze ordinea și legătura dintre lucruri.

4. În primul rînd, semnele trebuie să fie *neechivoce*. Este inadmisibil să notăm cu același simbol două lucruri diferite în aceeași cercetare. Dacă, în rezolvarea unei probleme, am denumit o anumită mărime a, trebuie să evităm de a da denumirea a la orice altceva care prezintă legături cu aceeași problemă. Bineînțeles, putem folosi litera a cu o semnificație diferită într-o altă problemă.

Deși este interzis să folosim același simbol pentru obiecte diferite, nu este interzis să utilizăm simboluri diferite pentru același obiect. Astfel, produsul dintre a și b poate fi scris:

$$a \times b \qquad a \cdot b \qquad ab.$$

În unele cazuri este avantajos să folosim două sau mai multe semne diferite pentru același obiect, dar aceste cazuri impun o atenție deosebită. De obicei, este preferabil să utilizăm cîte un singur semn pentru un singur obiect și în nici un caz nu trebuie să folosim mai multe semne dacă nu este neapărată nevoie.

5. O notație bună trebuie să fie *ușor de ținut minte* și de recunoscut; semnul trebuie să ne aducă imediat aminte obiectul, iar obiectul, semnul.

O metodă simplă de a alege semne ușor de recunoscut constă în folosirea *inițialelor* ca simboluri. De exemplu, la pct. **20** am folosit v pentru viteză, t pentru timp, r pentru rază, V pentru volum. Dar nu putem folosi inițiale în toate cazurile, deoarece se poate întîmpla ca în aceeași problemă să apară mai multe noțiuni care încep cu aceeași literă. Există și alte motive care impun restricția alegerii simbolurilor și alte mijloace de a face ca simbolurile să fie ușor de recunoscut, de care ne vom ocupa mai jos.

6. Notațiile nu sînt numai ușor de recunoscut, ci și deosebit de utile pentru cristalizarea concepției noastre, dacă *ordinea și legătura dintre semne sugerează ordinea și legătura dintre obiecte*. Vom recurge la mai multe exemple pentru a ilustra acest punct.

(I) Pentru a nota obiecte care sînt mai aproape unele de altele în problema noastră, folosim litere mai apropiate unele de altele din alfabet.

Astfel, folosim în general litere de la începutul alfabetului, ca a, b, c, pentru cantități date sau pentru constante, și litere de la sfîrșitul alfabetului, ca x, y, z, pentru cantități necunoscute sau pentru variabile.

La pct. **8** am folosit a,b,c, pentru dimensiunile date (lungimea, lățimea și înălțimea) ale unui paralelipiped. În acest caz, notația a, b, c era de preferat unei notații prin inițiale. Cele trei lungimi joacă același rol în problemă, fapt subliniat prin utilizarea unor litere consecutive. Mai mult, figurînd la începutul alfabetului, a, b, c sînt, după cum am mai spus, literele utilizate cel mai frecvent pentru a nota cantități date. Într-un alt caz, cînd cele trei lungimi joacă roluri diferite și este important să știm care lungime este orizontală și care este verticală, utilizarea unei notații prin inițiale ar putea fi preferabilă.

(II) Pentru a nota obiecte care aparțin aceleiași categorii, folosim adesea litere aparținînd aceluiași alfabet pentru o

categorie și utilizăm alfabete diferite pentru categorii diferite.

Astfel, în geometria plană, utilizăm adesea

majuscule latine ca A, B, C,... pentru puncte
minuscule latine ca a, b, c,... pentru segmente
minuscule grecești ca α, β, γ,... pentru unghiuri.

Dacă avem două obiecte de categorie diferită, dar între care există o relație specială, importantă pentru problema noastră putem alege pentru a nota aceste două obiecte litere corespunzătoare din respectivele alfabete, ca A și a, B și b etc. Un exemplu binecunoscut este notația uzuală într-un triunghi:

A,B,C pentru vîrfuri;
a,b,c pentru laturi;
α,β,γ pentru unghiuri.

Este de la sine înțeles că a este latura opusă vîrfului A și că unghiul din A a fost denumit α.

(III) La pct. **20**, literele a, b, x, y au fost deosebit de bine alese pentru a indica natura elementelor pe care le reprezintă și legătura dintre ele. Literele a, b arată că mărimile respective sînt constante; x, y indică variabile; a precede pe b, după cum x precede pe y și aceasta ne sugerează că relația dintre a și b este aceeași cu cea dintre x și y. În adevăr, a și x sînt orizontale, b și y sînt verticale, iar $a : b = x : y$.

7. Notația

$$\triangle ABC \sim \triangle EFG$$

arată că cele două triunghiuri considerate sînt asemenea. În cărțile moderne se subînțelege că formula arată că triunghiurile sînt asemenea, că vîrfurile omologe se corespund în ordinea în care au fost scrise, adică A cu E, B cu F, C cu G. În cărțile mai vechi, clauza referitoare la ordine nu era încă introdusă; cititorul trebuia să cerceteze figura sau să-și reamintească deducția pentru a vedea ce vîrf corespunde cu un altul.

Notația modernă este cu mult preferabilă celei vechi. Folosind notațiile moderne, putem trage concluzii direct din formulă, *fără a ne mai uita la figură*. Astfel, putem deduce

$$\sphericalangle A = \sphericalangle E$$
$$AB : BC = EF : FG$$

și alte relații de același fel. Notația mai veche exprimă mai puțin și nu ne permite să ajungem la concluzii atît de clare. O notație care exprimă mai mult decît alta poate fi calificată ca mai *pregnantă*. Notația modernă a asemănării triunghiurilor este mai pregnantă decît cea veche, ca reflectă ordinea și legătura dintre lucruri mai complet decît notația anterioară și, de aceea, ea poate servi ca bază pentru mai multe consecințe decît vechea notație.

8. Cuvintele au și un *al doilea înțeles*. Anumite contexte, în care un cuvînt este frecvent utilizat, îl influențează și adaugă ceva la înțelesul lui primar, o anumită umbră, înțelesul al doilea, denumit și „conotație". Cînd scriem cu grijă, căutăm să alegem cuvintele care au aproximativ același înțeles, pe cel al cărui înțeles secund este cel mai potrivit.

Există ceva similar și în notațiile matematice. Simbolurile matematice pot dobîndi și ele un fel de al doilea înțeles din contextele în care figurează frecvent. Dacă ne alegem notațiile cu grijă, trebuie să ținem seama de această circumstanță. Vom ilustra aceasta prin exemple.

Există anumite litere care au dobîndit un înțeles bine înrădăcinat, tradițional. Astfel, e se folosește de obicei pentru baza logaritmilor naturali, i pentru unitatea imaginară $\sqrt{-1}$, π pentru raportul dintre circumferința cercului și diametru. În ansamblu, este preferabil să utilizăm astfel de simboluri numai cu semnificația lor tradițională. Dacă folosim un astfel de simbol cu un alt sens, semnificația lui tradițională ar putea eventual să interfere, să ne încurce sau chiar să ne inducă în eroare. Este adevărat că astfel de înțelesuri secunde cu implicații periculoase cauzează mai puține neplăceri începătorului, care nu a studiat încă numeroase chestiuni, decît matematicianului care a avut probabil destul de-a face cu astfel de situații penibile.

Înțelesurile secunde ale simbolurilor pot fi și ele de folos, chiar foarte folositoare, dacă sînt utilizate cu tact. O notație la care am recurs cîndva ne poate ajuta să ne amintim de vreo metodă utilă; natural, trebuie să avem grijă de a separa net înțelesul prezent (fundamental) al simbolului de înțelesul lui din trecut (secundar). O *notație consacrată* [ca notația tradițională pentru elementele triunghiului, pe care am menționat-o la 6 (II)] prezintă mari avantaje; folosită în mai multe rînduri în trecut, ea ne poate ajuta să ne reamintim numeroase metode folosite înainte. Ținem minte

formulele într-o anumită notație consacrată. Natural, trebuie să avem suficientă grijă atunci cînd, în situații particulare, sîntem obligați să folosim o notație consacrată, într-un sens oarecum diferit de cel uzual.

9. Dacă avem de ales între două notații, un motiv poate pleda în favoarea uneia, iar un altul în favoarea celeilalte. Avem nevoie de experiență și de bun-simț, pentru a alege notația mai potrivită, după cum avem nevoie de experiență și de bun simț pentru a alege cuvinte mai potrivite. Este deci bine să cunoaștem diversele avantaje și dezavantaje discutate mai sus. Oricum ar fi, trebuie să ne alegem notațiile cu grijă și să avem *o motivare bună* pentru alegerea noastră.

10. Nu numai elevii cei mai slabi, ci și cei destul de inteligenți au cîteodată o aversiune pentru algebră. Există totdeauna ceva arbitrar și artificial în notații. A învăța o nouă notație înseamnă a ne împovăra memoria. Elevul inteligent se revoltă împotriva acestei împovărări, dacă el nu-și dă seama că ea comportă o anumită compensație. Elevul inteligent are o aversiune justificată pentru algebră, dacă nu i se dau suficiente ocazii pentru a se convinge din proprie experiență că *limbajul simbolurilor matematice ne stimulează gîndirea*. O sarcină importantă a profesorului, una dintre cele mai importante, constă în a-l ajuta să dobîndească această experiență.

Am spus că este o sarcină importantă, dar nu și că este o sarcină ușoară. Observațiile de mai sus pot fi întrucîtva utile. Vezi și *Punerea în ecuație*. Verificarea unei formule printr-o amplă discuție asupra proprietăților ei poate fi recomandată ca un exercițiu deosebit de instructiv; vezi pct. **14** și *Se poate verifica rezultatul*? 2.

Omul inteligent, rezolvînd o problemă, își pune adesea singur întrebări asemănătoare cu cele din lista noastră. Poate că a descoperit în mod independent întrebări de acest fel; sau, auzind o astfel de întrebare de la altul, a descoperit în ce mod poate s-o folosească și el. Poate că nici nu-și dă seama că repetă mereu aceeași întrebare stereotipă. Sau poate că această întrebare îl atrage în mod deosebit; el știe că întrebarea face parte din atitudinea sa intelectuală, adecvată în cutare și cutare fază a muncii și

că ajunge la abordarea corectă a problemei punîndu-și întrebarea corespunzătoare.

Omul inteligent poate găsi că întrebările și recomandările din lista noastră îi sînt de folos atunci cînd rezolvă probleme. El poate înțelege bine explicațiile și exemplele care ilustrează o anumită întrebare, el poate intui în ce fel urmează s-o folosească adecvat; dar el nu poate ajunge la înțelegerea ei reală decît atunci cînd întîlnește procedeul pe care această întrebare caută să-l declanșeze în munca sa personală și, convingîndu-se din experiență de utilitatea ei, descoperă folosul pe care această întrebare îl poate avea pentru el.

Cînd rezolvă probleme, omul inteligent trebuie să fie pregătit să pună toate întrebările din listă, dar nici o întrebare nu trebuie pusă dacă ea nu este sugerată de analiza amănunțită a problemei și de opinia nepreconceputâ pe care și-a format-o. În adevăr, el trebuie să-și dea singur seama dacă situația actuală este sau nu destul de asemănătoare cu o alta în care întrebarea respectivă a funcționat cu succes.

Rezolvînd o problemă, omul inteligent caută, în primul rînd, să înțeleagă problema cît poate de complet și de clar. Dar numai înțelegerea nu este suficientă; el trebuie să se concentreze asupra problemei, să dorească în mod serios rezolvarea ei. Dacă el nu dorește cu adevărat să rezolve problema, ar face mai bine să nu se apuce de ea. Secretul succesului real este de a ne angaja întreaga personalitate în problema la care lucrăm.

Pappus, celebrul matematician grec, a trăit, probabil, în jurul anului 300 î.e.n. În cartea a șaptea a lucrării sale *Collectiones*, el vorbește despre o ramură a științei pe care o denumește Ἀναλυόμενος. Putem traduce acest nume prin *Tezaurul analizei* sau prin *Arta de a rezolva probleme* sau chiar prin *Euristică*; acest din urmă termen pare preferabil aici. Există o bună traducere în engleză a acestei lucrări a lui Pappus[1]. Ceea ce urmează aici este o expunere liberă a textului originalului:

„Ceea ce se cheamă euristică este, pe scurt, un corp de doctrină special pentru uzul celor care, după ce au studiat *Elementele* obișnuite, sînt doritori să dobîndească price-

[1] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. I, Cambridge, 1908, p. 138.

perea de a rezolva probleme de matematică și este folositoare numai acestora. Ea este opera a trei oameni, Euclid, autorul *Elementelor*, Apoloniu din Perga și Aristeu cel Bătrîn. Ea ne învață metodele analizei și ale sintezei".

„În analiză luăm ca punct de plecare ceea ce este cerut, considerăm că aceasta este dat, și tragem consecințe de aici, apoi consecințe din consecințe, pînă cînd ajungem la un punct care poate fi utilizat ca punct de plecare al sintezei. Căci în analiză considerăm ca fiind gata făcut ceea ce ni se cere să fie făcut (ceea ce căutăm ca fiind gata găsit, ceea ce avem de demonstrat, ca fiind adevărat). Cercetăm de la ce antecedent ar putea fi dedus rezultatul dorit; apoi căutăm din nou care ar putea fi antecedentul acestui antecedent și așa mai departe, pînă cînd, trecînd de la un antecedent la altul, ajungem eventual la ceva dinainte cunoscut sau admis ca adevărat. Această metodă se numește analiză sau rezolvarea problemei mergînd de la sfîrșit spre început sau raționament regresiv".

„În sinteză însă, inversînd ordinea procesului, plecăm de la punctul la care am ajuns la sfîrșitul analizei, de la lucrul dinainte cunoscut sau admis ca adevărat. Deducem din el ceea ce îl preceda în analiză și continuăm cu deducțiile pînă cînd, străbătînd drumul în sens invers, reușim să ajungem pînă la urmă la ceea ce se cerea. Această metodă o numim sinteză sau soluție constructivă, sau raționament progresiv".

„Analiza este de două feluri; una este analiza „problemelor de demonstrat", al cărei scop constă în a stabili teoreme adevărate; cealaltă este analiza „problemelor de aflat" și tinde să găsească necunoscuta".

„Dacă avem o „problemă de demonstrat", ni se cere să demonstrăm sau să infirmăm o teoremă A, enunțată în mod clar. Nu știm încă dacă A este adevărată sau falsă; dar deducem din A o altă teoremă B, din B pe C și așa mai departe, pînă ajungem la o ultimă teoremă L, care ne este binecunoscută. Dacă teorema L este adevărată, A va fi de asemenea adevărată, cu condiția ca toate deducțiile noastre să fie convertibile. Plecînd de la L, demonstrăm teorema K, care o preceda în analiză și, continuînd în același fel, refacem drumul spre început; pe baza lui C, demonstrăm teorema B, pe baza lui B, demonstrăm pe A, și ne atingem astfel scopul. Dacă însă teorema L este falsă, am demonstrat falsitatea lui A".

„Dacă avem o „problemă de aflat", ni se cere să găsim o anumită necunoscută x, care satisface o condiție enunțată în mod clar. Nu știm încă dacă este posibil sau nu un lucru care să satisfacă o astfel de condiție; presupunînd însă că există un x care satisface condiția, deducem din el o altă necunoscută y, care trebuie să satisfacă o condiție înrudită; apoi legăm pe y de o altă necunoscută și, așa mai departe, pînă ajungem la o ultimă necunoscută z, pe care o putem obține printr-o metodă cunoscută. Dacă există în adevăr un z satisfăcînd condiția care îi este impusă, va exista și un x satisfăcînd condiția inițială, dacă toate deducțiile noastre sînt convertibile. Găsim întîi pe z; apoi, cunoscînd pe z, obținem necunoscuta care-l preceda pe z în analiză; continuînd în același fel, refacem drumul în sens invers și, pînă la urmă, cunoscînd pe y, obținem pe x, atingîndu-ne astfel scopul. Dacă însă nu există nimic care să satisfacă condiția impusă lui z, problema referitoare la x nu are soluție."

Să nu uităm că cele de mai sus nu sînt o traducere fidelă, ci o reproducere liberă, o *parafrazare*. Dat fiind că textul lui Pappus este important din mai multe puncte de vedere, merită să comentăm diferitele deosebiri dintre original și expunerea noastră.

1. Parafrazarea noastră folosește o terminologie mai bine definită decît originalul și introduce simbolurile $A, B, \ldots, L$, $x, y, \ldots z$, care nu figurează în original.

2. În parafrazarea noastră (p. 143, rîndul 1) vorbim despre „probleme de matematică", acolo unde originalul se referă la „probleme de geometrie". Aceasta subliniază că procedeele descrise de Pappus nu sînt nicidecum limitate la probleme de geometrie; în fapt, ele nu sînt limitate nici măcar la problemele de matematică. Vom ilustra aceasta prin exemple, deoarece, în astfel de chestiuni, sînt importante generalitatea și independența de natura subiectului (vezi pct. **3**).

3. *Exemplu algebric.* Să se afle necunoscuta x, care satisface ecuația

$$8\,(4^x + 4^{-x}) - 54\,(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

Este o „problemă de aflat" nu tocmai ușoară pentru un începător. El trebuie să aibă o oarecare idee despre analiză, bineînțeles nu despre cuvîntul „analiză", ci o idee despre felul cum ne putem atinge scopul prin reduceri repetate.

Mai mult, el trebuie să fie familiarizat cu ecuațiile elementare. Chiar cu anumite cunoștințe, este nevoie de o idee bună, de puțin noroc, de puțină ingeniozitate pentru a observa că, o dată ce $4^x = (2^x)^2$ și $4^{-x} = (2^x)^{-2}$, este avantajos să introducem necunoscuta

$$y = 2^x.$$

În adevăr, substituția este avantajoasă, deoarece ecuația în y

$$8\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) - 54\left(y + \frac{1}{y}\right) + 101 = 0$$

este mai simplă decît cea inițială; dar nu am terminat încă. Mai este nevoie de încă puțină ingeniozitate, de o altă substituție:

$$z = y + \frac{1}{y},$$

care transformă ecuația inițială în

$$8z^2 - 54z + 85 = 0.$$

Analiza noastră se termină aici, dacă cel ce rezolvă problema este familiarizat cu ecuația de gradul doi.

În ce constă sinteza? În realizarea pas cu pas a calculelor a căror posibilitate a fost admisă de analiză. Cel ce rezolvă problema nu are nevoie de vreo idee nouă pentru a-și termina lucrarea, ci numai de oarecare răbdare și atenție în calculul diferitelor necunoscute. Ordinea acestor calcule este inversă față de ordinea invenției; întîi se obține z ($z = 5/2, 17/4$), apoi y ($y = 2, 1/2, 4, 1/4$), iar la sfîrșit x, adică necunoscuta inițială ($x = 1, -1, 2, -2$). Sinteza reface în sens invers pașii analizei și exemplul nostru ne arată clar de ce procedează astfel.

4. *Exemplu nematematic.* Un om primitiv vrea să traverseze un pîrîu, dar nu o poate face în modul obișnuit, deoarece nivelul apei a crescut peste noapte. Astfel, traversarea devine obiect al unei probleme; „traversarea pîrîului" este x-ul acestei probleme a omului primitiv. El își poate reaminti că a mai traversat un alt pîrîu, mergînd pe un trunchi de copac doborît. El se uită în jur, pentru a găsi un copac căzut care să se potrivească; aceasta este noua sa necunoscută, y. El nu reușește să găsească un copac căzut care să-i satisfacă scopul, dar de-a lungul pîrîului cresc mulți copaci; el vrea ca unul dintre ei să cadă. Poate el

oare să facă în așa fel încît copacul să cadă de-a curmezișul pîrîului? Este o idee importantă, care comportă o nouă necunoscută; în ce fel poate doborî copacul, încît să cadă de-a curmezișul pîrîului?

Acest șir de idei trebuie, dacă acceptăm terminologia lui Pappus, să fie denumit analiză. Dacă omul primitiv reușește să-și ducă pînă la capăt analiza, el poate deveni inventatorul podului și al toporului. Care va fi sinteza? Traducerea în fapte a ideilor sale. Actul final al sintezei va fi traversarea pîrîului pe copacul prăvălit.

Analiza și sinteza sînt formate din aceleași elemente; cle exersează mintea omului în analiză și mușchii săi în sinteză; analiza constă din gînduri, iar sinteza din fapte. Mai există și o altă deosebire: ordinea este inversată. Traversarea pîrîului este prima dorință de la care pornește analiza și este ultimul act care încheie sinteza.

5. Parafrazarea noastră indică ceva mai clar decît originalul legătura naturală dintre analiză și sinteză. Această legătură a devenit evidentă după exemplele de mai sus. În mod firesc, analiza vine întîi, iar sinteza apoi; analiza înseamnă invențiune, iar sinteza executare; *analiza este alcătuirea unui plan, sinteza — realizarea lui.*

6. Parafrazarea noastră conservă și chiar subliniază anumite fraze curioase din original: *Considerăm ca fiind gata făcut ceea ce ni se cere să fie făcut, ceea ce căutăm ca fiind gata găsit, ceea ce avem de demonstrat, ca fiind adevărat.* Sună paradoxal; nu înseamnă oare să ne înșelăm singuri, dacă presupunem că problema pe care trebuie s-o rezolvăm este rezolvată? E obscur; ce înseamnă aceasta? Dacă examinăm însă cu atenție contextul și ne dăm osteneală de a ne orienta în propria noastră experiență de rezolvare a problemelor, înțelesul nu mai poate rămîne îndoielnic.

Să considerăm întîi o „problemă de aflat". Vom denumi necunoscuta x, iar datele a, b, c. „A considera problema rezolvată" înseamnă a presupune că există un obiect x care satisface condiția, adică ale cărui relații cu datele a, b, c sînt cele prescrise de condiție. Această presupunere o facem pentru a începe analiza, ea este provizorie și lipsită de pericol. În adevăr, *dacă* nu există un astfel de obiect *și* analiza nu ne conduce nicăieri, ea ne va duce neapărat la o problemă care nu are soluție și deci va fi clar că problema noastră inițială nu are nici ea soluție. În acest caz, presupunerea este utilă. Pentru a examina condiția, trebuie să ne imaginăm, să ne

reprezentăm sau să ne închipuim geometric relațiile prescrise de condiție între x și a, b, c; cum putem face aceasta, fără a ni-l închipui, a ni-l imagina, a ni-l reprezenta pe x ca existînd? În sfîrșit, presupunerea este naturală. Omul primitiv, ale cărui gînduri și fapte le-am discutat la 4, își imaginează că trece peste pîrîu pe un copac doborît, cu mult înainte de a putea să o facă efectiv; el își concepe problema „ca rezolvată".

Obiectul unei „probleme de demonstrat" constă în a demonstra o teoremă A. Sfatul de „a considera teorema A adevărată" este doar o invitație de a deduce consecințe din teorema A, deși nu am demonstrat-o încă. Poate că oamenii cu o anumită factură intelectuală sau care sînt adepții unei anumite filozofii se vor opune să tragă concluzii dintr-o teoremă nedemonstrată; astfel de oameni însă nu pot începe o analiză.

Cf. *Figurile*, 2.

7. Parafrazarea noastră folosește de două ori importanta propoziție „cu condiția ca toate deducțiile noastre să fie convertibile". Este o interpolare; originalul nu conține nimic asemănător, iar lipsa acestei condiții a fost observată și criticată în zilele noastre. Vezi *Problema auxiliară*, 6, pentru noțiunea de „reducție convertibilă".

8. „Analiza problemelor de demonstrat" este expusă în parafrazarea noastră în cuvinte destul de diferite de ale originalului, fără a modifica însă înțelesul. Cel puțin, nu am intenționat să schimbăm înțelesul. Totuși analiza „problemei de aflat" este expusă mai concret în parafrazare decît în original. Face impresia că originalul tinde să descrie un procedeu mai general, construcția unui *lanț de probleme auxiliare echivalente*, ca în *Problema auxiliară*, 7.

9. Numeroase manuale elementare de geometrie conțin cîteva observații referitoare la analiză, la sinteză și la „considerarea problemei ca rezolvată". Este în afară de orice îndoială că această tradiție adînc înrădăcinată provine de la Pappus, deși am putea indica cu greu vreun manual contemporan al cărui autor să-l cunoască direct pe Pappus. Chestiunea este destul de importantă pentru a figura în manualele elementare, însă ea este adesea greșit înțeleasă. Însuși faptul că ea se limitează la manualele de geometrie pune în evidență o lacună curentă a înțelegerii noastre; vezi mai sus, 2. Dacă comentariile din acest articol vor putea contribui la o mai bună înțelegere a chestiunii, amploarea lor va fi pe deplin justificată.

Un alt exemplu, un punct de vedere diferit și alte comentarii, vezi la *Reluarea problemei, de la sfîrșit spre început*.

Cf., de asemenea, *Reducerea la absurd și demonstrația indirectă*, 2.

Paradoxul inventatorului. Un plan mai ambițios poate avea mai multe șanse de succes.

Sună paradoxal. Totuși, dacă trecem de la o problemă la alta, putem observa adesea că problema nouă, mai ambițioasă, este mai ușor de mînuit decît cea inițială. Se poate întîmpla ca la mai multe întrebări să fie mai ușor de răspuns decît la una singură. O teoremă mai cuprinzătoare poate fi mai ușor de demonstrat, iar o problemă mai generală, mai ușor de rezolvat.

Paradoxul dispare, dacă examinăm mai îndeaproape cîteva exemple (*Generalizarea*, 2; *Inducția și inducția matematică*, 7). Planul mai ambițios poate avea mai multe șanse de succes cu condiția ca el să nu fie bazat pe pretenții neîntemeiate, ci pe luarea în considerare a unor lucruri aflate dincolo de cele cu care avem de-a face nemijlocit în prezent.

Particularizarea sau specializarea este trecerea de la considerarea unei mulțimi de obiecte date la o mulțime mai mică sau la un singur obiect din mulțimea dată. Particularizarea este adesea utilă în rezolvarea problemelor.

1. *Exemplu.* Într-un triunghi, fie r raza cercului înscris, R raza cercului circumscris și H înălțimea cea mai mare. Atunci

$$r + R \leqslant H.$$

Trebuie să demonstrăm (sau să infirmăm) teorema[1]. Avem o „problemă de demonstrat".

Teorema propusă este de un tip neobișnuit. Nu vom reuși să ne amintim de vreo teoremă despre triunghiuri care să aibă o concluzie asemănătoare. Dacă nu ne vine nimic în minte, putem încerca luînd un *caz particular* al acestei afirmații nemaiîntîlnite. Cel mai bine cunoscut triunghi special este cel echilateral, pentru care avem

$$r = H/3 \qquad R = 2H/3,$$

astfel că, în acest caz, afirmația este corectă.

[1] „The American Mathematical Monthly", **50**, (1943), p. 124 și **51**, (1944), pp. 234—236.

Dacă nu ne mai vine nici o idee, putem încerca *cel mai răspîndit caz-special*, cel al triunghiului isoscel. Forma triunghiului isoscel variază cu unghiul de la vîrf și avem aici două cazuri extreme (sau cazuri limită), unul în care unghiul de la vîrf devine 0° și celălalt în care ia valoarea 180°. În primul caz limită, baza triunghiului isoscel dispare și avem, evident,

$$r = 0 \qquad R = H/2,$$

ceea ce verifică afirmația. În celălalt caz limită însă, toate cele trei înălțimi dispar și

$$r = 0 \qquad R = \infty \qquad H = 0.$$

Afirmația nu este confirmată. Am demonstrat că teorema propusă este falsă și am rezolvat problema.

De altfel, este clar că afirmația este falsă și pentru triunghiuri isoscele foarte plate, al căror unghi de la vîrf are o valoare apropiată de 180°, astfel că putem „din oficiu" să neglijăm cazul limită, a cărui considerare poate să apară ca fiind nu tocmai „legitimă".

2. *L'exception confirme la règle* (Excepția confirmă regula). Această zicătoare atît de răspîndită trebuie considerată drept o glumă și să rîdem de lipsa de logică a autorului. Dacă abordăm lucrurile cu seriozitate, o singură excepție este, bineînțeles, suficientă pentru a infirma definitiv orice regulă sau propoziție generală. Metoda cea mai obișnuită și, în anumite privințe, cea mai bună pentru a infirma o astfel de propoziție constă tocmai în a prezenta un obiect care nu concordă cu ea; anumiți autori denumesc acest obiect *contraexemplu*.

Avem o propoziție despre care credem că este generală, referitoare la o anumită mulțime de lucruri; pentru a respinge propoziția, *particularizăm*, extragem din mulțime un obiect care este în dezacord cu propoziția generală. Exemplul de mai sus (de la 1) ne arată cum să procedăm. Putem începe prin a examina un caz special simplu, adică orice obiect ales mai mult sau mai puțin la întîmplare și pe care îl verificăm ușor. Dacă însă obiectul examinat concordă cu propoziția, putem eventual să obținem o anumită indicație din examinarea lui. Căpătăm astfel impresia că propoziția poate fi la urma urmelor adevărată și o anumită indicație privitoare la direcția în care urmează să căutăm demonstrația. Sau putem căpăta, ca în exemplul nostru de la 1, o sugestie referitoare

la direcția în care urmează să căutăm contraexemplul, adică o sugestie referitoare la alte cazuri particulare pe care urmează să le verificăm. Putem modifica, putem varia cazul examinat înainte, putem cerceta un caz particular mai cuprinzător, putem căuta cazuri limită, cum se arată la 1.

Cazurile limită sînt deosebit de instructive. Dacă o propoziție generală este presupusă aplicabilă tuturor mamiferelor, ea trebuie să fie valabilă și pentru un mamifer atît de neobișnuit cum este balena. Să nu uităm cazul particular care este balena. Cercetîndu-l, putem respinge propoziția generală; avem șanse mari în acest sens, deoarece autorii generalizărilor au tendința de a trece cu vederea asemenea cazuri extreme. Dacă vom constata însă că propoziția generală este verificată chiar și în cazul extrem, argumentarea inductivă obținută din această verificare va fi puternică, deoarece și speranța noastră de a obține o infirmare era puternică. Astfel, sîntem tentați să transformăm zicătoarea de la care am pornit: „Excepțiile pe care le-am prevăzut confirmă regula".

3. *Exemplu.* Se dau vitezele a două vapoare și pozițiile lor la un anumit moment; fiecare vapor urmează un drum rectiliniu, cu viteza constantă. Să se afle distanța dintre cele două vapoare, la momentul cînd sînt cel mai aproape unul de celălalt.

Care este necunoscuta? Distanța cea mai mică dintre două corpuri în mișcare. Corpurile trebuie considerate puncte materiale.

Care sînt datele? Poziția inițială a fiecărui punct material și vitezele lor. Acestea sînt constante ca mărime și direcție.

Care este condiția? Trebuie să determinăm distanța atunci cînd este minimă, adică atunci cînd cele două puncte în mișcare (vapoarele) sînt cel mai aproape unul de celălalt.

Să facem un desen. Să introducem notații corespunzătoare. În fig. 18 punctele A și B marchează pozițiile inițiale date ale celor două vapoare. Segmentele de dreaptă orientate (vectorii) AP și BQ reprezintă vitezele date, astfel încît primul vapor se mișcă pe dreapta care trece prin punctele A și P, parcurgînd în unitatea de timp distanța AP. Al doilea vapor se mișcă în mod analog pe dreapta BQ.

Care este necunoscuta? Distanța cea mai mică dintre cele două vapoare, care se mișcă respectiv pe dreptele AP și BQ.

Este de pe acum limpede ce trebuie să aflăm; dacă vrem să folosim însă numai mijloace elementare, încă nu ne este clar în ce fel putem obține rezultatul. Problema nu este prea

ușoară și dificultatea ei are o anumită nuanță particulară, pe care putem încerca să o exprimăm spunînd că „avem aici o varietate prea mare de elemente". Pozițiile inițiale A și B și vitezele AP și BQ pot fi date în diferite feluri; în adevăr, cele patru puncte A, B, P, Q pot fi alese arbitrar. Dar, oricare ar fi datele, soluția cerută trebuie să fie valabilă și nu ne dăm seama încă în ce fel să aplicăm aceeași soluție tuturor

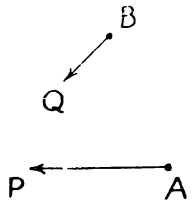

Fig. 18

acestor posibilități. Din această impresie de „prea mare varietate" poate apare o întrebare, urmată de răspuns:

Am putea să ne imaginăm o problemă înrudită și mai accesibilă? O problemă mai particulară? Firește, avem cazul special extrem, în care una dintre viteze dispare. În adevăr, un vapor poate să fie ancorat în B, iar Q să coincidă cu B. Distanța cea mai mică de la vaporul în repaus la cel în mișcare este perpendiculara pe dreapta în lungul căreia navighează acesta.

4. Dacă această idee ne vine o dată cu simțămîntul că în spatele ei se mai află și alte idei și că acest caz special extrem (care ni se poate părea prea simplu pentru a fi convingător) poate juca un rol, înseamnă că ne-a venit o idee cu adevărat strălucită.

Iată o problemă înrudită cu a noastră, problema particularizată pe care am rezolvat-o acum. *Am putea să o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul? Nu putem să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?* Trebuie s-o folosim, dar cum? Cum putem utiliza rezultatul cazului cînd B este în repaus, în cazul cînd B se mișcă? Repausul este un *caz particular* al mișcării. Iar mișcarea este relativă și, de aceea, oricare ar fi viteza dată a lui B, am dreptul să consider că B este în repaus! Iată ideea exprimată mai clar: dacă imprim întregului sistem format din cele două vapoare aceeași mișcare uniformă, poziția lor relativă nu se va schimba, dis-

tanțele relative rămîn aceleași și aceeași este situația, în particular, pentru distanța cea mai mică dintre ele, adică pentru cea căutată în problemă. Pot imprima o mișcare care reduce la zero viteza unuia dintre vapoare, reducînd astfel cazul general al problemei la cazul particular rezolvat mai sus. Să adunăm o viteză egală cu BQ și de sens opus atît lui BQ, cît și lui AP. Acesta este elementul auxiliar care face posibilă utilizarea rezultatului din cazul special.

Vezi fig. 19 pentru construcția distanței celei mai mici BS.

5. Soluția de mai sus (de la 3 și 4) are o schemă logică care merită să fie analizată și reținută.

Pentru a rezolva problema noastră inițială (enunțată în primele rînduri la 3), am rezolvat întîi o altă problemă, pe care o putem califica drept problema auxiliară (la 3, ultimele rînduri). Această problemă auxiliară este un caz particular al celei inițiale (cazul special extrem în care unul dintre cele două vapoare este în repaus). Problema inițială ne-a fost pusă, pe cînd problema auxiliară am inventat-o în cursul rezolvării. Problema inițială era grea, pe cînd cea auxiliară s-a rezolvat imediat. În adevăr, în calitatea ei de caz particu-

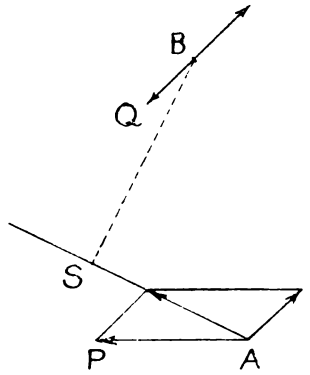

Fig. 19

lar, problema auxiliară era mult mai *puțin ambițioasă* decît cea inițială. Cum a fost posibil să rezolvăm problema inițială pe baza celei auxiliare? Pentru că, reducînd problema inițială la cea auxiliară, am adăugat o observație suplimentară, esențială (relativitatea mișcării).

Am reușit să rezolvăm problema inițială cu ajutorul a două observații. Întîi, am imaginat o problemă auxiliară avantajoasă. Apoi, am descoperit o observație suplimentară adecvată pentru a trece de la problema auxiliară la cea inițială. Am rezolvat problema propusă în doi pași, după cum putem traversa în doi pași un pîrîu, cu condiția de a avea norocul să descoperim în mijlocul lui o piatră pe care putem pune piciorul.

În rezumat, am folosit problema auxiliară, mai puțin grea, mai puțin ambițioasă și particulară ca *piatră de sprijin* în rezolvarea problemei inițiale, generale, mai grele și mai ambițioase.

6. Particularizarea are și alte întrebuințări, pe care nu le putem discuta aici. Este cazul doar să menționăm că ea poate fi utilă în verificarea soluției. (*Se poate verifica rezultatul?* 2.)

Un tip de particularizare ceva mai primitiv este adesea util profesorului. Aceasta constă în a da o anumită *interpretare concretă* elementelor matematice abstracte ale problemei. Astfel, dacă problema vorbește despre un paralelipiped dreptunghic, profesorul poate lua ca exemplu sala în care se află (pct. **8**). La geometria analitică în spațiu, un colț al clasei poate servi ca origine a coordonatelor, podeaua și doi pereți ca plane de coordonate, două muchii orizontale ale sălii și una verticală, ca axe de coordonate. Explicînd noțiunea de suprafață de rotație, profesorul desenează cu creta o curbă pe ușă și o deschide încet. Firește sînt mijloace simple, dar nu trebuie să omitem nimic din ceea ce poate oferi șansa de a face matematica accesibilă elevului; fiind o știință foarte abstractă, matematica trebuie expusă foarte concret.

Pedanteria și măiestria sînt atitudini opuse față de reguli.

1. A aplica litera unei reguli, în mod rigid, necritic, în cazurile în care se potrivește și în cazurile în care nu se potrivește, se cheamă pedanterie. Unii pedanți sînt niște bieți proști; ei nu înțeleg niciodată regula pe care o aplică cu atîta conștiinciozitate și lipsă de discernămînt. Alți pedanți au mai mult noroc; ei își înțeleg regula, cel puțin la început (înainte de a deveni pedanți), și aleg o regulă bună, care se potrivește în numeroase cazuri și dă greș numai ici-colo.

A aplica o regulă cu naturalețe, cu judecată, remarcînd cazurile în care ea se potrivește și fără a lăsa cuvintele regu-

lii să întunece scopul acțiunii și posibilitățile pe care le oferă situația se cheamă măiestrie.

2. Întrebările și recomandările din lista noastră pot fi folositoare atît celor ce rezolvă probleme, cît și profesorilor. Dar, în primul rînd, ele trebuie înțelese, modul lor adecvat de întrebuințare trebuie învățat, și învățat prin probe și erori, din greșeli și succese, din experiența aplicării lor. În al doilea rînd, utilizarea lor nu trebuie să degenereze niciodată în pedanterie. Nu trebuie să puneți nici o întrebare, nu trebuie să faceți nici o recomandare fără discernămînt, urmînd vreun obicei rigid. Fiți pregătiți pentru întrebări și recomandări variate și recurgeți la raționament. Lucrați la o problemă grea și interesantă; pasul pe care veți încerca să-l faceți acum trebuie să fie bazat pe o considerare atentă și inteligentă a problemei pe care o aveți în față. Vreți să-l ajutați pe un elev; ceea ce îi veți spune trebuie să provină dintr-o înțelegere plină de simpatie a dificultăților sale.

Și dacă aveți înclinația de a deveni pedant și vă trebuie neapărat o regulă pe care să vă bazați, învățați-o pe aceasta: Începeți totdeauna prin a vă pune la contribuție creierul.

Poate fi satisfăcută condiția? *Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta? Sau este insuficientă? Sau redondantă? Sau contradictorie?*

Aceste întrebări sînt adesea utile într-un stadiu incipient, cînd ele nu cer un răspuns definitiv, ci doar unul provizoriu, o intuiție, o conjectură. Vezi exemple la pct. **8**, **18**.

Este bine să prevedem anumite particularități ale rezultatului pe care îl căutăm. Dacă avem o idee asupra rezultatului la care ne putem aștepta, știm mai bine în ce direcție trebuie s-o luăm. O particularitate importantă a unei probleme este numărul de soluții pe care le admite. Problemele cele mai importante sînt cele care admit o soluție unică; înclinăm să considerăm problemele cu o soluție unic determinată ca fiind singurele probleme „rezonabile". Este problema noastră „rezonabilă" în acest sens? Dacă putem răspunde la această întrebare, fie chiar printr-o conjectură plauzibilă, interesul nostru pentru problemă crește și putem lucra cu mai mult spor.

Este problema noastră „rezonabilă"? Această întrebare este utilă într-un stadiu incipient al lucrării noastre, *dacă* putem găsi ușor răspunsul. Dacă este greu să răspundem, osteneala pe care ne-o dăm pentru a obține răspunsul poate fi

mai mare decît creşterea interesului. Aceasta este valabil şi pentru întrebarea *Poate fi satisfăcută condiţia?* şi pentru întrebările înrudite din lista noastră. Trebuie să le punem, pentru că răspunsul la ele poate fi uşor şi plauzibil, dar nu este cazul să insistăm asupra lor, atunci cînd răspunsul pare dificil sau obscur.

Întrebările corespunzătoare pentru „probleme de demonstrat" sînt: *Face oare impresia că teorema este adevărată? Sau pare mai curînd că este falsă?* Felul în care este pusă întrebarea arată limpede că răspunsul aşteptat nu este decît unul provizoriu şi plauzibil, o conjectură.

Problema auxiliară este o problemă de care ne ocupăm nu pentru ea însăşi, ci deoarece sperăm că analiza ei ne-ar putea ajuta să rezolvăm o altă problemă, problema noastră iniţială. Aceasta din urmă este scopul pe care vrem să-l atingem, iar problema auxiliară este un mijloc pentru atingerea scopului.

O insectă încearcă să scape prin geam, îşi repetă mereu şi mereu încercarea, dar nu încearcă să iasă prin celălalt geam, care este deschis şi prin care a intrat în cameră. Omul este sau cel puţin trebuie să fie capabil de a acţiona mai inteligent. Superioritatea omului constă în faptul că el ocoleşte obstacolul pe care nu-l poate înfrînge direct, că el imaginează o problemă auxiliară adecvată, atunci cînd problema iniţială i se pare de nerezolvat. Construirea unei probleme auxiliare este o operaţie intelectuală importantă. Întocmirea clară a unei probleme noi, subordonată unei alte probleme, conceperea distinctă ca scop a ceea ce este un mijloc pentru atingerea altui scop constituie o realizare subtilă a inteligenţei noastre. Să învăţăm (sau să predăm) cum se operează inteligent cu probleme auxiliare este o sarcină importantă.

1. *Exemplu.* Să se afle necunoscuta x care satisface ecuaţia

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Observînd că $x^4 = (x^2)^2$, ne putem da seama de avantajul substituţiei

$$y = x^2.$$

Obţinem o nouă problemă: să se afle y, care satisface ecuaţia:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Noua problemă este una auxiliară; vrem s-o folosim ca mijloc pentru a rezolva problema iniţială. Necunoscuta y a problemei noastre auxiliare este denumită în mod corespunzător *necunoscută auxiliară.*

2. *Exemplu.* Să se afle diagonala unui paralelipiped dreptunghic, cunoscînd lungimile a trei muchii care pornesc din acelaşi vîrf.

Încercînd să rezolvăm problema (pct. **8**), sîntem conduşi, prin analogie (pct. **15**), la o altă problemă: Să se afle diagonala unui dreptunghi, cunoscînd lungimea a două laturi care pornesc din acelaşi vîrf.

Noua problemă este auxiliară. Ne ocupăm de ea, în speranţa că analiza ei va fi utilă pentru rezolvarea problemei iniţiale.

3. *Folosul* pe care ni-l dă considerarea unei probleme auxiliare poate fi de diferite feluri. Putem folosi *rezultatul* problemei auxiliare. Astfel, în exemplul 1, după ce am găsit, rezolvînd ecuaţia de gradul doi în y, că y este egal cu 4 sau cu 9, tragem concluzia că $x^2 = 4$ sau $x^2 = 9$, de unde deducem toate valorile posibile ale lui x. În alte cazuri putem utiliza *metoda* problemei auxiliare. Astfel, în exemplul 2, problema auxiliară este una de geometrie plană; ea este analogă cu problema iniţială care este de geometrie în spaţiu, dar mai simplă decît ea. Este rezonabil să introducem o problemă auxiliară de acest fel, în speranţa că va fi instructivă, că ne va oferi posibilitatea să ne familiarizăm cu anumite metode, operaţii sau cu un aparat care se va dovedi apoi util pentru problema noastră iniţială. În exemplul 2, alegerea problemei auxiliare este destul de fericită; examinînd-o cu atenţie, constatăm că putem folosi atît metoda, cît şi rezultatul ei. (Vezi pct. **15** şi *A u f o s t u t i l i z a t e t o a t e d a t e l e*?.)

4. *Riscul.* Timpul şi efortul pe care le consacrăm problemei auxiliare sînt ale problemei iniţiale. Dacă cercetarea problemei auxiliare se soldează cu un eşec, înseamnă că timpul şi efortul pe care i le-am consacrat au fost zadarnice. De aceea, trebuie să ne exersăm judecata pentru a învăţa să alegem o problemă auxiliară. Trebuie să avem mai multe motive bune pentru alegerea noastră. Problema auxiliară poate fi mai accesibilă decît cea iniţială; sau poate părea mai instructivă; sau poate fi oarecum ispititoare din punct de vedere estetic. Cîteodată, singurul avantaj al problemei auxiliare constă în faptul că este nouă şi oferă posibilităţi neexplorate; recurgem la ea pentru că problema iniţială, ale cărei căi de acces par să fie epuizate, ne-a obosit.

5. *Cum o găsim?* Descoperirea soluției problemei inițiale depinde adesea de descoperirea unei probleme auxiliare corespunzătoare. Din nefericire, nu există o metodă infailibilă de a descoperi probleme auxiliare adecvate, după cum nu există metode infailibile de a descoperi soluția. Există însă întrebări și recomandări frecvent utile, ca de exemplu *S ă c e r c e t ă m n e c u n o s c u t a.* Deseori sîntem conduși la probleme auxiliare utile prin *M o d i f i c ă r i a l e p r o b l e m e i.*

6. *Probleme echivalente.* Două probleme se numesc *echivalente*, dacă soluția uneia dintre ele este o soluție a celeilalte și reciproc. Astfel, în exemplul 1, problema inițială și cea auxiliară sînt echivalente.

Să considerăm următoarele teoreme:

A. În orice triunghi echilateral, fiecare unghi are 60°.

B. Dacă un triunghi are unghiurile egale, atunci fiecare dintre ele este de cîte 60°.

Aceste două teoreme nu sînt identice. Ele conțin noțiuni diferite; una se referă la egalitatea laturilor unui triunghi, cealaltă la egalitatea unghiurilor lui. Dar fiecare teoremă rezultă din cealaltă. De aceea, problema demonstrării lui A este echivalentă cu problema demonstrării lui B.

Dacă ni se cere să demonstrăm pe A, avem un anumit avantaj să introducem ca problemă auxiliară demonstrația lui B. Teorema B este ceva mai ușor de demonstrat decît A și, ceea ce este mai important, putem *prevedea* că teorema B este mai ușoară decît A, ne-o spune judecata noastră, ni se pare plauzibil de la bun început că teorema B este mai ușoară decît teorema A. În adevăr, teorema B, în care este vorba numai despre unghiuri, este mai „omogenă" decît teorema A, care se referă și la unghiuri, și la laturi.

Trecerea de la problema inițială la cea auxiliară se numește reducție *convertibilă* sau *bilaterală* sau *echivalentă*, dacă cele două probleme — cea inițială și cea auxiliară — sînt echivalente. Astfel, reducția de la A la B (vezi mai sus) este convertibilă și tot astfel este reducția din exemplul 1. Reducția convertibilă este, într-un anumit sens, mai importantă și mai oportună decît alte căi de a introduce probleme auxiliare, dar și problemele auxiliare care nu sînt echivalente cu cea inițială se pot arăta foarte utile, vezi exemplul 2.

7. *Lanțurile de probleme auxiliare echivalente* sînt frecvente în raționamentele matematice. Avem de rezolvat o problemă A; nu știm să găsim soluția, dar putem constata că A este echivalentă cu o altă problemă, B. Considerarea problemei B ne poate conduce la o a treia problemă, C, echivalentă cu B. Procedînd în același mod, reducem pe C la D și așa mai departe, pînă ajungem la o ultimă problemă L, a cărei soluție este cunoscută sau poate fi găsită imediat. Deoarece fiecare problemă este echivalentă cu cea precedentă, ultima problemă L trebuie să fie echivalentă cu problema noastră A. Astfel, putem deduce soluția problemei A din problema L, la care am ajuns ca ultimă verigă a unui lanț de probleme auxiliare.

Lanțurile de probleme de acest fel au fost luate în considerare încă de matematicienii greci, după cum rezultă dintr-un important pasaj al lui *P a p p u s.* Ca ilustrare, vom relua exemplul 1. Vom denumi (A) condiția impusă necunoscutei x:

$$(A) \qquad x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

O cale de a rezolva problema constă în a transforma condiția într-o altă condiție, pe care o vom denumi (B)

$$(B) \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2)13 + 144 = 0.$$

Observăm că condițiile (A) și (B) sînt diferite. Ele sînt însă, dacă vreți, numai puțin diferite, ele sînt cu siguranță echivalente, cum ne putem convinge cu ușurință, dar sînt, bineînțeles, neidentice. Trecerea de la (A) la (B) este nu numai corectă, ci urmărește și un scop net, evident oricui este familiarizat cu rezolvarea ecuației de gradul doi. Continuînd să lucrăm în aceeași direcție, transformăm condiția (B) într-o altă condiție:

$$(C) \qquad (2x^2)^2 - 2(2x^2)\,13 + 169 = 25.$$

Continuînd în același mod, obținem

$$(D) \qquad (2x^2 - 13)^2 = 25$$

$$(E) \qquad 2x^2 - 13 = \pm 5$$

$$(F) \qquad x^2 = \frac{13 \pm 5}{2}$$

$$(G) \qquad x = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 5}{2}}$$

$$(H) \qquad x = 3, \text{ sau } -3, \text{ sau } 2, \text{ sau } -2.$$

Fiecare dintre reducțiile noastre a fost convertibilă. De aceea, ultima condiție (H) este echivalentă cu prima condiție

(A), astfel că 3, —3, 2, —2 sînt toate soluțiile posibile ale ecuației noastre inițiale.

În cele de mai sus am dedus dintr-o condiție inițială (A) un șir de condiții (B), (C), (D), ... echivalente fiecare cu cea precedentă. Este un element care merită cea mai mare atenție. Condiții echivalente sînt satisfăcute de obiecte identice. De aceea, dacă trecem de la o condiție propusă la una nouă, echivalentă cu ea, avem aceleași soluții. Dacă trecem însă de la o condiție propusă la alta mai îngustă, pierdem soluții, iar dacă trecem la una mai largă, admitem soluții suplimentare, improprii, care nu au nimic comun cu problema noastră inițială. Dacă, într-un șir de reducții consecutive, trecem la o condiție mai îngustă, iar apoi la alta mai largă, riscăm să pierdem cu totul linia problemei inițiale. Pentru a evita acest pericol, trebuie să verificăm cu grijă natura fiecărei condiții nou introduse, pentru a vedea dacă este echivalentă cu condiția inițială. Această chestiune este mai importantă atunci cînd nu avem de-a face cu o singură ecuație, ca aici, ci cu un sistem de ecuații sau atunci cînd condiția nu este exprimată prin ecuații, ca bunăoară în problemele de construcții geometrice.

(Cf. *P a p p u s*, în special comentariile 2, 3, 4, 8. Descrierea de la p. 144 pînă la p. 147, este consacrată unui lanț de „probleme de aflat", avînd fiecare cîte o altă necunoscută; această restricție nu este necesară. Exemplul considerat aici are specificul diametral opus: toate problemele lanțului au aceeași necunoscută și diferă numai prin forma condiției. Natural, nici una dintre aceste restricții nu este necesară.)

8. *Reducția unilaterală.* Avem două probleme, A și B, ambele nerezolvate. Dacă am ști să rezolvăm A, vom izbuti să obținem soluția completă a lui B. Nu însă și invers; dacă am ști să rezolvăm problema B, am obține, eventual, o anumită informație despre A, dar nu am ști cum să deducem soluția completă a lui A din cea a lui B. Într-un astfel de caz, rezolvarea lui A ne dă mai mult decît rezolvarea lui B. Vom spune că A este *mai ambițioasă*, iar B *mai puțin ambițioasă* între aceste două probleme.

Dacă trecem de la o problemă propusă la o problemă auxiliară mai ambițioasă sau mai puțin ambițioasă, spunem că acest pas este o *reducție unilaterală*. Există două feluri de reducție unilaterală și ambele sînt, într-un anumit sens, mai riscante decît reducția bilaterală sau convertibilă.

Exemplul 2 prezintă o reducție unilaterală la o problemă mai puțin ambițioasă. În adevăr, dacă am ști să rezolvăm problema inițială, în care este vorba despre un paralelipiped de dimensiuni a, b, c, am putea trece la o problemă auxiliară, punînd $c = 0$, și obținînd un paralelogram de lungime a și de lățime b. Alt exemplu de reducție unilaterală la o problemă mai puțin ambițioasă, vezi *P a r t i c u l a r i z a r e a*, 3,4, 5. Aceste exemple ne arată că, dacă avem puțin noroc, putem folosi o problemă auxiliară mai puțin ambițioasă ca *punct de sprijin*, combinînd soluția problemei auxiliare cu o observație suplimentară adecvată pentru a obține soluția problemei inițiale.

Reducția unilaterală la o problemă mai ambițioasă poate fi la fel de folositoare (vezi *G e n e r a l i z a r e a*, 2, și reducerea de la prima problemă la a doua în *I n d u c ț i a ș i i n d u c ț i a m a t e m a t i c ă*, 1, 2). În adevăr, problema mai ambițioasă poate fi mai accesibilă; acesta este *P a r a d o x u l i n v e n t a t o r u l u i*.

Probleme de aflat, probleme de demonstrat. Vom face o paralelă între aceste două tipuri de probleme.

1. Scopul unei „probleme de aflat" este de a găsi un anumit obiect, necunoscuta problemei.

Necunoscuta se mai numește *quaesitum*, adică ceea ce se caută, ceea ce se cere. „Problemele de aflat" pot fi teoretice sau practice, abstracte sau concrete, probleme serioase sau jocuri. Putem căuta tot felul de necunoscute; putem încerca să aflăm, să obținem, să găsim, să dobîndim sau să construim tot felul de obiecte. Într-o problemă cu un asasinat, necunoscuta este ucigașul. Într-o problemă de șah, necunoscuta este o mutare. În unele ghicitori, necunoscuta este un cuvînt. În diverse probleme elementare de algebră, necunoscuta este un număr. Într-o problemă de construcție geometrică, necunoscuta este o figură.

2. Scopul unei „probleme de demonstrat" constă în a arăta convingător că o aserțiune anumită, enunțată clar, este adevărată, sau că este falsă. Trebuie să răspundem la întrebarea: Este această afirmație adevărată sau falsă? Și răspunsul trebuie să fie concludent, convingător, dovedind că aserțiunea este adevărată, sau dovedind că este falsă.

Un martor susține că inculpatul era acasă în noaptea crimei. Judecătorul trebuie să stabilească dacă această afirmație este adevărată sau nu, și, mai mult, el trebuie să dea o moti-

vare cît mai bună pentru ceea ce a stabilit. Aşadar, judecătorul este în faţa unei „probleme de demonstrat". O altă „problemă de demonstrat" este „să se demonstreze teorema lui Pitagora". Nu spunem „să se demonstreze adevărul sau falsitatea teoremei lui Pitagora". Ar fi mai bine, într-un anumit sens să introducem în enunţul problemei şi posibilitatea infirmării, dar o putem neglija, deoarece ştim că şansele de a demonstra falsitatea teoremei lui Pitagora sînt mai mult decît mici.

3. Părţile principale ale unei „probleme de aflat" sînt *necunoscuta*, *datele* şi *condiţia*.

Dacă avem de construit un triunghi de laturi a,b,c, necunoscuta este un triunghi, datele sînt cele trei segmente de lungimi a,b,c, iar triunghiul trebuie să satisfacă condiţia de a avea laturile a,b,c. Dacă avem de construit un triunghi ale cărui înălţimi sînt a,b,c, necunoscuta este un obiect de aceeaşi natură ca mai sus, datele sînt aceleaşi, însă condiţia care leagă necunoscuta şi datele între ele este alta.

4. Dacă o „problemă de demonstrat" este o problemă matematică obişnuită, părţile ei principale sînt *ipoteza* şi *concluzia* teoremei pe care trebuie s-o demonstrăm sau s-o infirmăm.

„Dacă un patrulater are toate laturile egale, atunci diagonalele sale sînt perpendiculare". Partea a doua a frazei, care începe cu „atunci", este concluzia, iar prima, care începe cu „dacă", este ipoteza.

[Nu toate teoremele matematice pot fi despărţite natural în ipoteză şi în concluzie. Astfel, vom reuşi cu greu să despărţim teorema: „Există o infinitate de numere prime."].

5. Dacă vreţi să rezolvaţi o „problemă de aflat", trebuie să cunoaşteţi, şi să cunoaşteţi foarte exact, părţile ei principale: necunoscuta, datele şi condiţia. Lista noastră conţine multe întrebări şi recomandări privitoare la aceste părţi.

Care este necunoscuta? Care sînt datele? Care este condiţia?

Să separăm diversele părţi ale condiţiei.

Să găsim legătura dintre date şi necunoscută.

Să cercetăm necunoscuta! Şi să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeaşi necunoscută sau una similară.

Să păstrăm numai o parte a condiţiei, omiţînd restul; în ce măsură este acum determinată necunoscuta, cum mai poate ea să varieze? Am putea deduce ceva util din datele problemei? Ne-am putea imagina alte date, adecvate pentru a determina necunoscuta? Am putea schimba necunoscuta, sau datele, sau şi pe una şi pe celelalte, dacă este cazul, astfel încît noile date să fie mai strîns legate de noua necunoscută?

Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiţie?

6. Dacă vreţi să rezolvaţi o „problemă de demonstrat", trebuie să cunoaşteţi, şi să cunoaşteţi foarte exact părţile ei principale, adică ipoteza şi concluzia. Există întrebări şi recomandări utile, referitoare la aceste părţi, corespunzătoare întrebărilor şi recomandărilor din lista noastră, adaptate special pentru „problemele de aflat".

Care este ipoteza? Care este concluzia?

Să separăm diversele părţi ale ipotezei.

Să găsim legătura dintre ipoteză şi concluzie.

Să cercetăm concluzia! Şi să ne gîndim la o teoremă cunoscută, avînd aceeaşi concluzie sau una similară.

Să păstrăm numai o parte a ipotezei, omiţînd restul; mai rămîne oare concluzia validă? Se poate deduce ceva util din ipoteză? Am putea oare imagina o altă ipoteză din care să deducem cu uşurinţă concluzia? Am putea oare modifica ipoteza sau concluzia sau pe amîndouă dacă este cazul, astfel încît legătura dintre noua ipoteză şi noua concluzie să fie mai strînsă?

A fost utilizată întreaga ipoteză?

7. „Problemele de aflat" sînt mai importante în matematica elementară, iar „problemele de demonstrat", în matematica superioară. În cartea noastră, „problemele de aflat" se bucură de mai multă atenţie decît celelalte, însă autorul speră să restabilească echilibrul într-o altă expunere mai completă a aceluiaşi material.

Probleme practice. Acestea se deosebesc, sub diverse aspecte, de problemele pur matematice, însă motivele principale şi metodele de rezolvare sînt, în esenţă, aceleaşi. Problemele tehnice aplicate implică, de obicei, probleme de matematică. Am vrea să spunem cîteva cuvinte despre deosebirile, analogiile şi legăturile dintre aceste două tipuri de probleme.

1. O problemă practică impresionantă este construcţia unui baraj pe un rîu. Nu avem nevoie de cunoştinţe de specialitate pentru a înţelege această problemă. În vremuri încă preistorice, cu mult înaintea epocii noastre, epoca teoriilor ştiinţifice, oamenii au construit diverse feluri de diguri în valea Nilului şi în alte părţi ale lumii, unde recoltele depindeau de irigaţii.

Să ne imaginăm problema construcției unui mare baraj modern.

Care este necunoscuta? O problemă de acest gen cuprinde multe necunoscute: amplasamentul exact al barajului, forma și dimensiunile sale, materialele folosite la construcție etc.

Care este condiția? Nu putem răspunde la această întrebare printr-o singură frază scurtă, pentru că există numeroase condiții. Într-un proiect atît de amplu trebuie satisfăcute multe cerințe economice importante, neglijînd cît mai puțin alte cerințe. Barajul trebuie să furnizeze putere electrică, să dea apă pentru irigații sau pentru nevoi comunale, precum și să contribuie la controlul nivelului apei în timpul viiturilor. Pe de altă parte, el trebuie să jeneze cît mai puțin navigația, condițiile de viață ale peștilor cu importanță economică, frumusețea peisajului etc. Și, bineînțeles, barajul trebuie să coste cît mai puțin și să fie construit cît de repede cu putință.

Care sînt datele? Mulțimea de date, pe care ar fi de dorit să le avem, este imensă. Avem nevoie de date topografice, referitoare la regiunea pe unde curge rîul și afluenții săi; de date geologice importante pentru soliditatea fundațiilor, despre eventuale scurgeri de apă, și despre materiale de construcție existente în acest loc; de date meteorologice referitoare la precipitațiile anuale și la nivelul viiturilor; de date economice despre valoarea terenurilor care urmează să fie inundate, despre costul materialelor și al manoperei etc.

Exemplul nostru arată că necunoscutele, datele și condițiile sînt mai complexe și mai puțin nedefinite într-o problemă practică decît într-una de matematică.

2. Pentru a rezolva o problemă, avem nevoie de o anumită rezervă de cunoștințe acumulate anterior. Inginerul modern dispune de un sistem de cunoștințe cu o înaltă specializare, de teoria științifică a rezistenței materialelor, de propria sa experiență și de cea acumulată din literatura tehnică de specialitate. Nu putem intra aici în amănuntele acestor cunoștințe speciale, dar putem încerca să ne imaginăm ce era în mintea unui constructor de diguri din vechiul Egipt.

El văzuse, natural, diverse alte diguri, eventual mai mici: îngrămădiri de pămînt sau de piatră, care țineau în frîu apa. Văzuse apele umflate ale fluviului cărînd tot felul de aluviuni și asaltînd digul. Avusese poate ocazia să contribuie la repararea spărturilor și a eroziunii cauzate de viituri. Văzuse poate un dig prăbușindu-se sub presiunea apelor. Auzise cu siguranță povestiri despre diguri care rezistaseră la încercarea veacurilor sau care pricinuiseră catastrofe din cauza unor spărturi apărute pe neașteptate. Își închipuia, poate, presiunea exercitată de fluviu pe suprafața digului, precum și deformațiile lui interioare.

Însă constructorul de diguri din vechiul Egipt nu avea noțiuni științifice, cantitative, precise, despre presiunea lichidului și despre deformațiile unui corp solid. Astfel de noțiuni constituie o parte esențială din bagajul intelectual al inginerului modern. Dar și acesta folosește numeroase cunoștințe care nu au încă un nivel științific precis; ceea ce știe despre eroziunea provocată de apa curgătoare, transportul aluviunilor, despre plasticitate și despre alte proprietăți, nu prea clar descrise ale unor materiale, reprezintă mai mult cunoștințe cu caracter empiric.

Exemplul nostru arată că cunoștințele necesare și noțiunile folosite sînt mai complicate și mai puțin net definite în problemele practice decît în cele de matematică.

3. Necunoscutele, datele, condițiile, noțiunile, cunoștințele preliminare necesare sînt toate mai complicate și mai puțin clar conturate în problemele practice decît în cele de matematică pură. Este o deosebire importantă, poate chiar deosebirea principală și este sigur că ea implică alte deosebiri; însă motivele și metodele principale ale soluției sînt aceleași în ambele tipuri de probleme.

Este o opinie larg răspîndită că problemele practice necesită mai multă experiență decît cele de matematică. Poate că este așa. După toate probabilitățile însă, deosebirea constă în natura cunoștințelor necesare, și nu în atitudinea noastră față de problemă. Cînd rezolvăm o problemă de un fel sau de celălalt, trebuie să ne bazăm pe experiența noastră în domeniul unor probleme similare și ne punem adesea întrebările: *Am mai văzut aceeași problemă într-o formă întrucîtva diferită? Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

La rezolvarea unei probleme de matematică plecăm de la concepte foarte clare, bine ordonate în mintea noastră. La rezolvarea unei probleme practice sîntem adesea nevoiți să plecăm de la idei destul de nebuloase; în acest caz, clarificarea noțiunilor poate deveni o parte importantă a problemei. Astfel, medicina are astăzi mai multe posibilități de a opri bolile infecțioase decît înainte de apariția lucrărilor lui Pasteur, cînd însăși noțiunea de infecție era destul de nebuloasă. *Am ținut seama de toate noțiunile esențiale care intervin în problemă?* Este o întrebare potrivită pentru toate felurile

de probleme, însă utilizarea ei variază între limite largi, în funcție de natura noțiunilor pe care le cuprinde problema.

Într-o problemă de matematică bine enunțată, toate datele și toate clauzele condiției sînt esențiale și trebuie luate în considerație. În problemele practice avem o mulțime de date și de condiții, din care luăm în considerație cît de multe putem, dar sîntem nevoiți să neglijăm unele dintre ele. Să luăm cazul proiectantului unui mare baraj. El ține seama de interesul public și de interesele economice importante, dar este nevoit să neglijeze diverse aspecte mai mărunte. Datele problemei sale sînt, riguros vorbind, în număr inepuizabil. De exemplu, el ar dori să știe ceva mai mult despre natura geologică a terenului pe care va construi fundația, însă el va trebui, poate, să se oprească la un moment dat de a mai strînge date geologice, deși rămîne inevitabil o anumită nesiguranță în această privință.

Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiție? Nu putem trece peste aceste întrebări cînd avem de-a face cu probleme de matematică pură. În schimb, la problemele practice, aceste întrebări trebuie puse într-o formă modificată: Au fost utilizate toate datele care *ar putea contribui apreciabil* la soluție? Au fost folosite toate condițiile care *ar putea influența apreciabil* soluția? Strîngem toate datele relevante, strîngem date suplimentare, dacă este cazul, dar se poate întîmpla să trebuiască să ne oprim, să tragem undeva o linie de demarcație, nu putem face în așa fel încît să nu neglijăm nimic. *Dacă vrei să navighezi fără pericol, nu porni pe mare.* Destul de frecvent se acumulează un mare surplus de date care nu influențează apreciabil forma finală a soluției.

4. Proiectanții digurilor din Egiptul antic trebuiau să se bazeze numai pe interpretarea în conformitate cu bunul-simț al experienței lor; pe altceva nu se puteau întemeia. Inginerul modern nu se poate baza numai pe bunul-simț, în special dacă poiectul său este nou și îndrăzneț; el trebuie să calculeze rezistența barajului proiectat, să calculeze deformațiile și tensiunile din interiorul lui. În acest scop, el trebuie să aplice teoria elasticității (care este foarte bună pentru construcțiile din beton). Pentru a aplica această teorie, el are nevoie de un mare număr de calcule; problema inginerească îl conduce la o problemă de matematică.

Această problemă de matematică este prea tehnică pentru a fi discutată aici; tot ce putem spune despre ea este o remarcă generală. La formularea și la rezolvarea problemelor de matematică deduse din probleme practice ne mulțumim, de obicei, cu o *aproximație*. Sîntem nevoiți să neglijăm anumite date și condiții minore ale problemei practice. De aceea, este recomandabil să admitem anumite erori mici în calcule, mai ales dacă simplitatea astfel obținută compensează ceea ce pierdem în domeniul preciziei.

5. Am putea spune multe lucruri interesante despre aproximații. Nu presupunem însă că cititorul ar avea cunoștințe mai speciale în domeniul matematicii și de aceea ne vom mărgini la un singur exemplu intuitiv și instructiv.

Alcătuirea hărților geografice este o importantă problemă practică. La realizarea lor presupunem adesea că Pămîntul este o sferă. Este însă numai o ipoteză aproximativă și nicidecum purul adevăr. Suprafața terestră nu este o suprafață definită matematic și știm sigur că Pămîntul este turtit la poli. Dacă presupunem însă că el este o sferă, ne este mai ușor să desenăm harta. Cîștigăm mult în simplitate și nu pierdem cine știe ce în precizie. În adevăr, să ne închipuim o minge mare, avînd exact forma Pămîntului, și diametrul ecuatorului de 7,5 m. Distanța dintre polii acestei mingii va fi mai mică decît 7,5 m, pentru că Pămîntul este turtit, însă diferența va fi numai de 2,5 cm. Așadar, sfera este o aproximație practic satisfăcătoare.

Probleme de rutină. Putem numi astfel problema rezolvării ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$, dacă soluția ecuației generale de gradul doi a fost explicată și exemplificată înainte, astfel că elevului nu-i mai rămîne altceva de făcut decît să introducă numerele -3 și 2 în locul unor anumite litere din soluția generală. Chiar dacă ecuația de gradul doi nu a fost rezolvată în mod general, în „litere", ci s-au rezolvat numai vreo șase ecuații de gradul doi similare cu coeficienți numerici, problema de mai sus trebuie calificată ca „problemă de rutină". În general, o problemă este „de rutină" dacă ea poate fi rezolvată fie prin substituirea unor date particulare într-o problemă generală rezolvată anterior, fie urmărind pas cu pas, fără pic de originalitate, un model care apare frecvent. Cînd dă o problemă de rutină, profesorul îi furnizează elevului un răspuns imediat și decisiv la întrebarea: *Cunoaștem vreo problemă înrudită?* Astfel, elevului nu-i trebuie decît un minim de atenție și de răbdare pentru a aplica o rețetă dată de-a

gata, care nu-i oferă posibilitatea de a face uz de judecată sau de inventivitate.

În predarea matematicii, problemele de rutină — chiar multe probleme de rutină — sînt necesare, dar este de neiertat dacă-i dăm elevului numai astfel de probleme. A-l învăța pe elev doar efectuarea mecanică a unor operații matematice de rutină și nimic mai mult înseamnă a ne situa sub nivelul cărții de bucate, deoarece rețetele de bucătărie lasă totuși oarecare latitudine imaginației și judecății bucătarului, ceea ce nu este cazul cu rețetele matematice.

Profesorul de matematică tradițional din anecdotele populare este distrat. De obicei, el vine undeva și crede că și-a pierdut umbrela, dar de fapt are cîte o umbrelă în fiecare mînă. El preferă să stea cu fața la tablă și cu spatele la clasă. Scrie a, spune b și se gîndește la c; trebuia însă să pună d. Unele dintre formulele sale verbale se transmit din generație în generație:

„Pentru a rezolva această ecuație diferențială, te uiți la ea, pînă cînd îți vine în minte soluția".

„Principiul acesta este atît de general, încît orice aplicare particulară a lui este imposibilă".

„Geometria este arta de a raționa corect despre figuri incorecte".

„Metoda mea de a înfrînge dificultățile constă în a le ocoli".

„Care este deosebirea dintre metodă și artificiu? Metoda este un artificiu pe care-l puteți folosi și a doua oară".

La urma urmelor, puteți învăța cîte ceva de la acest profesor de matematică tradițional. Să sperăm că profesorul de matematică de la care nu puteți învăța nimic nu va deveni tradițional.

Progrese și reușită. Ați mai progresat în rezolvarea problemei? Ce ați realizat în esență? Sînt întrebări pe care ni le putem adresa și nouă cînd rezolvăm o problemă sau pe care le putem pune unui elev, supraveghindu-i lucrarea. Sîntem obișnuiți să apreciem, cu mai multă sau mai puțină siguranță, progresele și realizările în cazuri concrete. Pasul de la astfel de cazuri concrete la o descriere generală nu este de loc ușor. Vom încerca totuși să facem acest pas, dacă dorim ca studiul nostru asupra euristicii să fie întrucîtva complet, și trebuie să încercăm de a clarifica ce înseamnă, în general, progrese și reușită în rezolvarea problemelor.

1. Pentru a rezolva o problemă trebuie să avem anumite cunoștințe în domeniul din care face parte problema și trebuie să selecționăm și să strîngem datele relevante din cunoștințele noastre existente, dar inițial depozitate în memorie. Înțelegem mult mai complet problema spre sfîrșit decît la început; ce s-a adăugat? Ceea ce am reușit să extragem din memoria noastră. Pentru a obține soluția, trebuie să ne reamintim diverse fapte esențiale. Dacă avem de-a face cu o problemă de matematică, trebuie să ne aducem aminte de probleme rezolvate anterior, de teoreme cunoscute, de definiții. Această extragere a elementelor relevante din memoria noastră poate fi denumită *mobilizare*.

2. Dar pentru a rezolva o problemă nu este suficient să ne amintim fapte izolate, ci trebuie să le combinăm, iar combinarea lor trebuie să fie adaptată la problema respectivă. Astfel, cînd rezolvăm o problemă de matematică, trebuie să construim o argumentare care să sintetizeze materialele extrase din memorie într-un întreg bine adaptat scopului. Această activitate de adaptare și de combinare poate fi denumită *organizare*.

3. În fapt, mobilizarea și organizarea nu pot fi niciodată separate efectiv una de cealaltă. Concentrați asupra problemei noastre, ne amintim numai de fapte mai mult sau mai puțin legate de scopul nostru și nu avem altceva de organizat decît materialul pe care ni l-am reamintit și l-am mobilizat.

Mobilizarea și organizarea nu sînt decît două *aspecte* ale aceluiași proces complex, care are și multe alte aspecte.

4. Un alt aspect al progreselor pe care le facem în lucrarea noastră constă în *schimbarea modului nostru de a concepe, de a înțelege problema*. Îmbogățiți cu toate materialele pe care ni le-am reamintit, pe care le-am adaptat și le-am prelucrat, concepția noastră asupra problemei este mult mai completă la sfîrșit decît era la început. Vrînd să trecem de la înțelegerea inițială a problemei la alta mai adecvată, mai bine adaptată, încercăm diverse puncte de vedere și considerăm problema sub diferite aspecte. Am putea cu greu să progresăm, dacă nu am proceda la *Modificări ale problemei*.

5. Pe măsură ce înaintăm spre țelul nostru final, el ni se conturează tot mai deplin și, atunci cînd îl vedem mai bine, socotim că sîntem mai aproape de el. Pe măsură ce analiza problemei înaintează, *prevedem* din ce în ce mai clar ce trebuie să facem pentru a obține soluția și în ce fel anume.

Rezolvînd o problemă de matematică, putem prevedea, dacă sîntem bine inspirați, că vom putea recurge la o teoremă cunoscută, că ne va fi de folos considerarea unei probleme rezolvate anterior, că se va impune să revenim la înțelesul cîte unui termen tehnic. Aceste lucruri nu le prevedem cu certitudine, ci numai cu un anumit grad de plauzibilitate. Ajungem la certitudine completă după ce am obținut soluția completă, dar înainte de a fi ajuns la certitudine, trebuie să ne mulțumim adesea cu o conjectură mai mult sau mai puțin plauzibilă. Fără considerații care sînt doar plauzibile și provizorii nu am putea găsi niciodată soluția certă și definitivă. Avem nevoie de *Raționamente euristice*.

6. Ce înseamnă a progresa în direcția soluției? A înainta în mobilizarea și în organizarea cunoștințelor noastre, a evolua în concepția asupra problemei, a prevedea într-o măsură crescîndă pașii care vor constitui argumentarea definitivă. Putem progresa continuu, prin pași mici și imperceptibili, dar din cînd în cînd înaintăm brusc, în salt. O înaintare subită în direcția soluției se numește *Idee revelatoare*, idee bună, gînd fericit, străfulgerare, scînteie (în germană există un termen mai tehnic: *Einfall*). Ce este ideea revelatoare? O schimbare bruscă, instantanee a viziunii noastre, o reorganizare subită a modului nostru de a concepe problema, o prevedere bruscă și plină de încredere a pașilor pe care trebuie să-i facem pentru a obține soluția.

7. Considerațiile de mai sus constituie un fond potrivit pentru întrebările și recomandările din lista noastră.

Unele dintre aceste întrebări și recomandări vizează direct *mobilizarea* cunoștințelor dobîndite anterior: *Am mai întîlnit oare problema în trecut? Sau am mai întîlnit-o într-o formă oarecum diferită? Cunoaștem oare vreo problemă înrudită? Cunoaștem vreo teoremă care s-ar putea dovedi utilă? Să cercetăm necunoscuta! Și să să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară.*

Există situații tipice, în care ne gîndim că am strîns materialele corespunzătoare și lucrăm la o mai bună *organizare* a ceea ce am mobilizat: *Iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Am putea să o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul? Am putea cumva să-i folosim metoda? Nu putem să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*

Există alte situații tipice, în care socotim că nu am strîns încă suficient material. *Ne întrebăm ce anume ne mai lipsește:*

Au fost utilizate toate datele? A fost utilizată întreaga condiție? S-a ținut oare seama de toate noțiunile esențiale care figurează în problemă?

Unele întrebări ne orientează direct spre *modificări* sau *variante* ale problemei: *S-ar putea da o altă formulare problemei? S-ar putea da un enunț întrucîtva diferit?* Mai multe întrebări ne îndreaptă spre modificări ale problemei prin metode specifice, ca revenirea la *Definiție*, folosirea *Analogiei*, *Generalizării*, *Particularizării*, *Descompunerii și recombinării*.

Alte întrebări ne sugerează o încercare de a *prevedea* natura soluției pe care vrem s-o obținem: *Este posibil să satisfacem condiția? Este condiția suficientă pentru a determina necunoscuta? Sau este insuficientă? Sau redondantă? Sau contradictorie?*

Întrebările și recomandările din lista noastră nu menționează direct *ideea revelatoare*; în fapt însă, toate sînt legate de ea. Înțelegînd problema, ne pregătim în vederea ei, întocmind un plan căutăm s-o provocăm, după ce am provocat-o, o realizăm, reluînd problema retrospectiv în desfășurarea și cu rezultatul ei, căutăm s-o exploatăm mai bine[1].

Punerea în ecuație este ca o traducere dintr-o limbă în alta (*Notațiile*, 1). Această comparație, folosită de Newton în lucrarea sa *Aritmetica universală*, ne poate ajuta să clarificăm natura unor dificultăți de care se lovesc adesea atît elevii, cît și profesorii.

1. A pune în ecuație înseamnă a exprima în simboluri matematice o condiție enunțată în cuvinte; este traducerea din limba curentă în limbajul formulelor matematice. Dificultățile de care ne lovim la punerea în ecuație sînt dificultăți de traducere.

Pentru a traduce o frază din engleză în franceză, sînt necesare două lucruri. Întîi, trebuie să înțelegem perfect fraza englezească; apoi, trebuie să fim familiarizați cu formele de expresie specifice limbii franceze. Situația este cu totul similară, cînd încercăm să explicăm în simboluri matematice o condiție enunțată în cuvinte. Întîi, trebuie să înțelegem exact condiția; apoi, trebuie să fim familiarizați cu formele de expresie matematice.

[1] Diverse puncte discutate în acest articol sînt cercetate mai complet în articolul autorului din „Acta Psychologica", vol. 4 (1938), pp. 113—170.

O frază englezească este relativ ușor de tradus în franceză, dacă traducerea se poate face cuvînt cu cuvînt. Există însă expresii idiomatice englezești care nu se pretează la o traducere cuvînt cu cuvînt în franceză. Dacă fraza noastră conține astfel de expresii idiomatice, traducerea devine dificilă; trebuie să acordăm mai puțină atenție cuvintelor și mai multă atenție înțelesului în ansamblu. Înainte de a traduce fraza vom fi nevoiți, eventual, să o restructurăm.

Punerea în ecuație prezintă multe aspecte similare. În cazurile ușoare, enunțul verbal se descompune aproape automat în părți consecutive, care se pot transcrie imediat în simboluri matematice. În cazurile mai dificile, condiția cuprinde părți care nu pot fi traduse imediat în simboluri matematice. Într-o astfel de situație, trebuie să acordăm mai puțină atenție enunțului verbal și să ne concentrăm asupra înțelesului. Înainte de a scrie formulele, s-ar putea să fie nevoie de o restructurare a condiției, și în timp ce ne ocupăm de aceasta trebuie să avem mereu în vedere resursele notațiilor matematice.

În toate cazurile, în cele ușoare și în cele dificile, trebuie să înțelegem condiția, *să separăm diversele părți ale condiției* și să ne întrebăm: *Pot fi ele transcrise în limbaj matematic?* În cazurile ușoare, reușim fără ezitare să descompunem condiția în părți care pot fi transcrise în simboluri matematice; în cazurile grele, descompunerea corespunzătoare a condiției este mai puțin evidentă.

Expunerea de mai sus trebuie recitită după studierea exemplelor care urmează.

2. *Să se afle două numere a căror sumă este* 78 *și al căror produs este* 1296.

Împărțim pagina în două printr-o linie verticală. Într-o coloană scriem enunțul verbal, desfăcut în părți adecvate. În cealaltă coloană scriem semnele algebrice, în dreptul părților corespunzătoare ale enunțului verbal. Originalul figurează în stînga, iar traducerea în simboluri, în dreapta:

Enunțul problemei

În limba curentă	*În limbaj algebric*
Să se afle două numere	$x,\quad y$
a căror sumă este 78 și	$x + y = 78$
al căror produs este 1296	$xy = 1296$

În acest caz, enunțul verbal se descompune aproape automat în părți consecutive, care se transcriu imediat în simboluri matematice.

3. *Să se afle latura bazei și înălțimea unei prisme drepte cu baza pătrată, fiind date volumul,* 63 cm^3, *și aria ei totală,* 102 cm^2.

Care sînt necunoscutele? Latura bazei, pe care o vom nota cu x și înălțimea prismei, y.

Care sînt datele? Volumul, 63, și suprafața totală, 102.

Care este condiția? Prisma cu baza pătrată de latură x și cu înălțimea y trebuie să aibă volumul 63 și aria totală 102.

Să separăm diversele părți ale condiției. Avem aici două părți: una referitoare la volum, iar cealaltă la arie.

Este puțin probabil să șovăim în împărțirea condiției tocmai în aceste două părți; dar nu putem transcrie „imediat" aceste părți. Trebuie să știm cum se calculează volumul și diferitele părți ale ariei. Dacă știm suficientă geometrie, putem ușor să reenunțăm cele două părți ale condiției, astfel încît traducerea în ecuații să devină posibilă. Scriem în coloana din stînga enunțul în cuvinte al problemei, restructurat esențial și lărgit în așa fel, încît să fie traductibil în limbaj algebric.

La o prismă dreaptă cu baza pătrată	
să se afle latura bazei	x
și înălțimea.	y
1° Volumul este dat	63
Aria bazei este un pătrat de latură x	x^2
și înălțimea	y
determină volumul, care este produsul lor	$x^2y = 63$
2° Aria totală este dată.	102
Suprafața prismei constă din două pătrate	
de latură x	$2x^2$
și din patru dreptunghiuri avînd fiecare	
baza x și înălțimea y,	$4xy$
suma lor dînd aria totală	$2x^2 + 4xy = 102.$

4. *Se dau ecuația unei drepte și coordonatele unui punct. Să se afle simetricul punctului dat în raport cu dreapta dată.*

Este o problemă de geometrie analitică plană.

Care este necunoscuta? Un punct avînd, să zicem, coordonatele p,q.

Ce este dat? Ecuația unei drepte, să zicem $y = mx + n$ și un punct, ale cărui coordonate le vom nota cu a, b,

Care este condiția? Punctele (a, b) și (p,q) sînt simetrice în raport cu dreapta $y = mx + n$.

Am ajuns acum la dificultatea principală, care constă în a descompune condiția în părți care să fie exprimabile în lim-

bajul geometriei analitice. Trebuie să înțelegem bine natura acestei dificultăți. Descompunerea condiției poate fi logic ireproșabilă, și totuși inutilă. Ceea ce ne trebuie aici este o descompunere în părți, potrivită pentru o exprimare analitică. Ca să găsim o astfel de descompunere, trebuie *să revenim la definiția* simetriei, ținînd seama mereu de resursele geometriei analitice. Ce înseamnă simetrie în raport cu o dreaptă? ce relații se pot exprima simplu în geometria analitică? Ne concentrăm asupra primei întrebări, dar nu trebuie s-o uităm nici pe a doua. Așa putem ajunge, eventual, la descompunerea de mai jos:

Punctul dat	(a, b)
și punctul căutat	(p, q)
sînt în următoarea relație:	
1) dreapta care le unește este perpendiculară pe cea dată	$\frac{q-b}{p-a} = -\frac{1}{m}$
2) mijlocul dreptei care le unește este situat pe dreapta dată.	$\frac{b+q}{2} = m\frac{a+p}{2} + n$

Raționamentul euristic nu este considerat ca definitiv și riguros, ci doar ca provizoriu și plauzibil, avînd scopul de a descoperi soluția problemei pe care o avem în față. Sîntem nevoiți de multe ori să recurgem la raționamentul euristic. Vom obține certitudinea completă abia atunci cînd vom fi ajuns la soluția completă, însă înainte de a ajunge la certitudine, trebuie să ne mulțumim adesea cu o conjectură mai mult sau mai puțin plauzibilă. Avem nevoie de provizoriu, înainte de a ajunge la definitiv. Avem nevoie de raționamentul euristic atunci cînd construim o demonstrație riguroasă, după cum avem nevoie de schelărie atunci cînd construim o casă.

Vezi *Indicii de progres*. Raționamentul euristic este adesea bazat pe inducție sau analogie; vezi *Inducția și inducția matematică*, *Analogia*, **8**, **9**, **10**[1].

Raționamentul euristic este valoros ca atare. Nu este însă bine să confundăm raționamentul euristic cu demonstrația riguroasă. Și mai rău este să dăm un raționament euristic drept demonstrație riguroasă.

Predarea unor obiecte, în special predarea calculului diferențial și integral pentru ingineri și fizicieni ar putea fi substanțial îmbunătățită, dacă natura raționamentului euristic ar fi mai bine înțeleasă, dacă avantajele și limitele lui ar fi recunoscute pe față și dacă manualele ar expune demonstrațiile euristice, prezentîndu-le ca atare. O deducție euristică, prezentată cu pricepere și sinceritate, poate fi utilă; ea poate însemna o pregătire pentru o deducție riguroasă, care conține, de obicei, anumiți germeni. Însă o deducție euristică are toate șansele să fie periculoasă, dacă este prezentată echivoc, cu o vizibilă ezitare între timiditate și suficiență. Vezi *Ce rost au demonstrațiile?*

[1] Vezi articolul autorului din „American Mathematical Monthly", vol. 48, pp. 450—465.

Realizarea planului. A concepe un plan și a-l realiza sînt două lucruri diferite. Într-un anumit sens, aceasta este adevărat și pentru problemele de matematică; există o anumită deosebire de caracter al muncii între realizarea planului unei soluții și conceperea lui.

1. Putem folosi raționamente provizorii și doar plauzibile atunci cînd căutăm deducția riguroasă și definitivă, după cum recurgem la schelărie pentru a sprijini un pod în timpul construcției. Cînd lucrarea este destul de avansată însă, înlăturăm schelăria, și podul trebuie să fie capabil să se mențină singur. Tot astfel, cînd soluția este destul de avansată, înlăturăm toate tipurile de raționamente provizorii și plauzibile, iar rezultatul trebuie să fie susținut numai de o argumentare riguroasă.

Cît căutăm planul soluției, nu trebuie să ne fie teamă de raționamente care nu sînt decît plauzibile, euristice. Tot ce ne conduce la o idee bună este bun. Dar trebuie să ne schimbăm punctul de vedere atunci cînd pornim la realizarea planului și cînd nu mai putem accepta decît raționamente riguroase și convingătoare. *În cadrul realizării planului soluției, se verifică fiecare pas. Ne putem da limpede seama că pasul este corect?*

Cu cît verificăm mai minuțios pașii noștri cînd realizăm planul, cu atît putem recurge mai liber la raționamente euristice atunci cînd îl întocmim.

2. Trebuie să expunem unele considerații referitoare la ordinea în care elaborăm detaliile planului, mai ales cînd problema este complicată. Nu trebuie să omitem nici un detaliu, trebuie să înțelegem relația dintre detaliul pe care-l avem în față și ansamblul problemei, nu trebuie să pierdem din vedere legătura dintre pașii principali ai soluției. De aceea, trebuie să acționăm într-o ordine adecvată.

În particular, nu este recomandabil să verificăm detalii minore, înainte de a avea motive temeinice pentru a crede că pașii principali ai raționamentelor noastre sînt corecți. Dacă există o defecțiune în linia principală a argumentării, verificarea diverselor detalii secundare va fi oricum inutilă.

Ordinea în care realizăm detaliile argumentării poate să fie foarte diferită de cea în care le-am inventat; de asemenea, poate fi cu totul diferită ordinea în care scriem detaliile în expunerea definitivă. *Elementele* lui Euclid prezintă detaliile raționamentelor într-o ordine sistematică rigidă, care a fost adesea imitată și adesea criticată.

3. În expunerea lui Euclid, toate raționamentele se desfășoară în același sens: de la date la necunoscută în „problemele de aflat" și de la ipoteză spre concluzie, în „problemele de demonstrat". Orice element nou — punct, linie etc. — trebuie să fie dedus corect din date sau din elemente deduse corect în pașii precedenți. Orice aserțiune nouă trebuie să fie demonstrată corect, pe baza ipotezei sau pe baza unor aserțiuni demonstrate corect în pașii precedenți. Fiecare nou element, fiecare nouă aserțiune sînt examinate cînd apar pentru prima oară și ele sînt analizate numai o singură dată; ne putem concentra întreaga atenție numai asupra pasului actual, nu trebuie să ne uităm nici înapoi, nici înainte. Ultimul element nou a cărui deducție trebuie s-o verificăm este necunoscuta. Ultima aserțiune a cărei demonstrație trebuie s-o analizăm este concluzia. Dacă fiecare pas este corect, inclusiv ultimul, întregul lanț de raționamente este corect.

Maniera expunerii euclidiene poate fi recomandată fără rezervă, atunci cînd vrem să analizăm amănunțit desfășurarea unor raționamente. În special cînd este vorba despre propriile noastre raționamente, cînd acestea sînt lungi și complicate, și după ce le-am găsit și le-am controlat în linii mari, astfel încît nu ne mai rămîne decît să examinăm rînd pe rînd fiecare punct particular; în acest caz, nimic nu este mai potrivit decît să scriem întregul lanț de raționamente în maniera euclidiană.

Însă maniera lui Euclid nu este recomandabilă fără rezerve, dacă vrem să transmitem o deducție unui cititor sau unui ascultător care nu a mai avut de-a face cu ea în trecut. Expunerea euclidiană este foarte bună pentru a pune în evidență fiecare punct particular, dar nu este la fel de bună pentru a evidenția linia principală a raționamentelor. *Cititorul inteligent* își poate da cu ușurință seama că fiecare pas

este corect, dar are greutăți mari cînd vrea să înțeleagă izvorul, scopul, legătura ansamblului de raționamente. Cauza acestei dificultăți constă în faptul că expunerea euclidiană se desfășoară de cele mai multe ori în ordinea diametral opusă ordinii naturale a invenției. (Expunerea lui Euclid urmează strict ordinea „sintezei"; vezi *Pappus*, mai ales comentariile 3, 4, 5.)

4. Să rezumăm. Maniera expunerii euclidiene, care înaintează neabătut de la date spre necunoscută și de la ipoteză spre concluzie este perfectă pentru a verifica amănunțit raționamentele, dar este departe de perfecțiune atunci cînd trebuie să facă inteligibilă linia principală a raționamentelor.

Este foarte de dorit ca elevii să-și verifice propriile raționamente în maniera lui Euclid, mergînd de la date spre necunoscută și verificînd fiecare pas, dar aceasta nu trebuie să le fie impus în mod rigid. Nu este la fel de recomandabil ca profesorul să prezinte multe demonstrații în maniera pur euclidiană, deși expunerea euclidiană poate fi foarte folositoare după o discuție în care, cum recomandă cartea de față, elevii, călăuziți de profesor, descoperă, pe cît se poate, prin propriile lor mijloace, ideea principală a soluției. Tot atît de bună pare să fie maniera adoptată de anumite manuale, în care întîi se conturează intuitiv ideea principală, după care urmează expunerea detaliilor în ordinea euclidiană.

5. Dorind să se convingă că afirmația sa este adevărată, matematicianul conștiincios caută să-și dea seama de aceasta intuitiv și să găsească o demonstrație formală. *Ne putem da limpede seama că este corect? Putem demonstra că este corect?* Matematicianul conștiincios acționează în această privință ca o cumpărătoare conștiincioasă într-un magazin. Vrînd să se convingă de calitatea unei mărfi, ea cere să o vadă și s-o încerce. Simțul intuitiv și dovada formală sînt două căi diferite de a cunoaște adevărul, comparabile cu cunoașterea unui obiect material prin intermediul a două simțuri diferite — văzul și pipăitul.

Intuiția poate anticipa cu mult demonstrația formală. Orice elev inteligent, chiar dacă nu are cunoștințe sistematice de geometrie în spațiu, poate să-și dea seama, deîndată ce a înțeles clar termenii, că două drepte paralele fiecare cu o a treia sînt paralele între ele (cele trei drepte pot sau nu să fie coplanare). Însă demonstrația acestei teoreme, așa cum este dată în propoziția nouă din cartea XI a *Elementelor* lui

Euclid, necesită o pregătire îndelungată, minuțioasă și ingenioasă.

Operarea formală cu reguli logice și cu formule algebrice poate anticipa mult intuiția. Dar oricine aproape își va da imediat seama că trei drepte luate la întîmplare împart planul în șapte părți (considerați singura parte finită, triunghiul determinat de cele trei drepte). Puțini însă sînt capabili să-și dea seama, chiar dacă își concentrează la maximum atenția, că cinci plane luate la întîmplare împart spațiul în 26 părți. Se poate însă demonstra riguros că numărul corect este efectiv 26, iar demonstrația nu este nici măcar lungă sau grea.

În timp ce ne realizăm planul, ne verificăm fiecare pas. La verificarea unui pas, ne putem încrede în intuiție sau putem apela la reguli formale. Cîteodată primează intuiția, alteori raționamentul formal. Este un exercițiu interesant și util să urmăm ambele căi. *Ne putem da seama limpede că pasul este corect*? Da, ne putem da seama de aceasta clar și distinct. Intuiția precumpănește aici; va putea oare raționamentul formal s-o ajungă din urmă? *Dar putem DEMONSTRA că este corect*?

Încercarea de a demonstra formal ceea ce am văzut intuitiv și de a vedea intuitiv ceea ce am demonstrat formal este un foarte bun exercițiu intelectual. Din nefericire, în clasă nu avem totdeauna suficient timp pentru aceasta. Exemplul discutat la punctele **12** și **14** este tipic în această privință.

Redondantă, vezi *Condiție*.

Reducerea la absurd și demonstrația indirectă sînt procedee diferite, dar înrudite.

Reducerea la absurd ne arată falsitatea unei afirmații, deducînd din ea o absurditate manifestă. „Reducerea la o absurditate" este un procedeu matematic, care seamănă întrucîtva cu ironia, procedeul favorit al satiricului. Ironia se preface că adoptă o anumită opinie, o reliefează și o suprareliefează ca pînă la urmă să o conducă la o absurditate evidentă.

Demonstrația indirectă stabilește adevărul unei afirmații, arătînd că presupunerea contrară este falsă. Astfel, demonstrația indirectă seamănă întrucîtva cu stratagema unui politician care își sprijină candidatul prin faptul că strică reputația oponentului acestuia.

Atît reducerea la absurd, cît și demonstrația indirectă sînt instrumente efective pentru a face descoperiri, care apar în mod natural într-o minte iscoditoare. Totuși ele nu sînt agreate de unii filozofi și de mulți începători, ceea ce este ușor de înțeles; nu oricui îi plac politicienii abili și satiricii. Vom ilustra prin exemple eficiența celor două procedee, după care vom discuta obiecțiile care se ridică împotriva lor.

1. *Reducerea la absurd.* Folosind fiecare cifră numai cîte o singură dată, să se scrie niște numere a căror sumă să fie egală cu 100.

Putem învăța cîte ceva din încercarea de a rezolva acest joc matematic, al cărui enunț necesită unele clarificări.

Care este necunoscuta? Mai multe numere; și înțelegem aici prin numere, natural, numere întregi pozitive.

Ce este dat? Numărul 100.

Care este condiția? Ea constă din două părți: 1°. Scriind numerele cerute, fiecare cifră zecimală, adică 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9 are voie să fie folosită numai o singură dată. 2° Suma tuturor numerelor căutate trebuie să fie 100.

Să păstrăm numai o parte a condiției, omițînd restul. Prima parte este ușor de satisfăcut. Să luăm șirul 19, 28, 37, 46, 50; fiecare cifră apare numai cîte o singură dată. Desigur însă, partea a doua a condiției rămîne nesatisfăcută; suma acestor numere este 180, nu 100. Putem, însă, găsi și altceva mai bun. „Încearcă, încearcă mereu". Iată:

$$19 + 28 + 30 + 7 + 6 + 5 + 4 = 99.$$

Prima parte a condiției este satisfăcută, a doua este aproape satisfăcută: am obținut 99 în loc de 100. Firește, putem satisface ușor a doua parte a condiției, dacă o neglijăm pe prima:

$$19 + 28 + 31 + 7 + 6 + 5 + 4 = 100.$$

Prima parte nu este satisfăcută: cifra 1 intervine de două ori, pe cînd zero niciodată. Celelalte cifre sînt toate corecte, „Încearcă, încearcă mereu".

După cîteva încercări neizbutite, putem fi conduși să bănuim că suma 100 nu poate fi obținută în acest fel. Eventual apare problema: *Să se demonstreze imposibilitatea de a satisface simultan ambele părți ale condiției propuse.*

Chiar elevii destul de buni vor găsi că această problemă le depășește puterile. Totuși, dacă abordăm problema în mod corect, răspunsul se obține destul de ușor. *Trebuie să examinăm*

situația ipotetică în care ambele părți ale condiției sînt satisfăcute.

Avem bănuiala că această situație nu se poate realiza și această bănuială, întemeiată pe experiența încercărilor noastre nereușite, are un oarecare fundament. Totuși să privim problema fără păreri preconcepute și să considerăm situația în care, după presupunerea noastră, ipotetic, ambele părți ale condiției sînt satisfăcute. Așadar, să ne închipuim un șir de numere a căror sumă este 100. Trebuie să fie numere de o cifră și de două cifre. Avem zece cifre, care trebuie să fie toate diferite, deoarece fiecare dintre cifrele 0, 1, 2, ..., 9 nu apare decît o singură dată. Prin urmare, suma celor 10 cifre trebuie să fie

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Unele dintre aceste cifre marchează unități, iar altele zeci. Nu trebuie să avem prea multă perspicacitate pentru a ajunge la ideea că *suma cifrelor care marchează zeci* poate prezenta oarecare importanță. În adevăr, fie această sumă t. Atunci suma restului cifrelor care marchează unități va fi $45 - t$. De aceea, suma tuturor cifrelor șirului trebuie să fie

$$10\,t + (45 - t) = 100.$$

Este o ecuație în t. Este de gradul întîi și ne dă

$$t = \frac{55}{9}$$

Aici este cu siguranță ceva greșit. Valoarea găsită pentru t este fracționară, cînd, în mod normal, t trebuie să fie un întreg. Plecînd de la presupunerea că ambele părți ale condiției noastre ar putea fi satisfăcute simultan, am ajuns la o absurditate manifestă. Cum se explică aceasta? Presupunerea noastră inițială trebuie să fie falsă; cele două părți ale condiției *nu pot* fi satisfăcute în același timp. Astfel, ne-am atins scopul, am reușit să demonstrăm că cele două părți ale condiției sînt incompatibile.

Este un raționament tipic prin reducere la absurd.

2. *Observații.* Să revenim la raționamentele de mai sus și să medităm asupra liniei lor generale.

Vrem să demonstrăm că este imposibil să satisfacem o anumită condiție, adică să arătăm că situația în care toate părțile condiției sînt satisfăcute simultan nu se realizează

niciodată. Dar cît timp nu am demonstrat nimic, sîntem obligați să luăm în considerare posibilitatea ca această situație să se realizeze. Numai dacă vom considera cu toată claritatea situația ipotetică și o vom analiza minuțios, putem spera să descoperim în ea un punct evident fals. Și trebuie să găsim un anumit punct evident fals, dacă vrem să arătăm în mod convingător că situația este imposibilă. Prin urmare, vedem că procedeul care s-a dovedit reușit în exemplul nostru este, în ansamblu, rezonabil: trebuie să examinăm situația ipotetică în care toate părțile condiției sînt satisfăcute, *deși o astfel de situație pare cu totul improbabilă.*

Cititorul cu mai multă experiență poate distinge aici un alt fapt. Pasul principal al procedeului nostru a constat în scrierea unei ecuații pentru t. Am fi putut ajunge la aceeași ecuație fără a bănui că este ceva fals în condiția noastră. Dacă vrem să scriem o ecuație, trebuie să exprimăm în limbaj matematic că toate părțile condiției sînt satisfăcute, *deși încă nu știm dacă este efectiv posibil să satisfacem simultan toate aceste părți.*

Procedeul nostru nu este „preconceput". Putem spera să găsim necunoscuta care satisface condiția sau putem spera să arătăm că ea nu poate fi satisfăcută. Într-o privință, este destul de puțin important: cercetarea, dacă este bine condusă, pornește în ambele cazuri în același fel, examinînd situația ipotetică în care condiția este satisfăcută, și arată abia mai pe urmă care speranță s-a adeverit.

Cf. *Figurile*, 2. Cf. *Pappus*; o analiză care se încheie prin infirmarea teoremei propuse sau prin dovada că o „problemă de aflat" nu are soluție este în fond o reducere la absurd.

3. *Demonstrația indirectă.* Se numesc prime numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... care nu pot fi descompuse în factori mai mici, deși sînt mai mari decît 1. (Unitatea este aici exclusă, deoarece, evident, ea nu poate fi descompusă în factori mai mici, are o natură diferită și nu trebuie considerată ca număr prim.) Numerele prime sînt „elementele ultime" în care se pot descompune toate numerele întregi (mai mari decît 1). De exemplu,

$$630 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

este descompus într-un produs de cinci factori primi.

Este șirul numerelor prime infinit sau nu? Este normal să presupunem că șirul numerelor prime nu se încheie nici-

odată. Dacă el s-ar termina undeva, toți întregii s-ar putea descompune într-un număr finit de elemente ultime și lumea ar apărea, dacă putem spune astfel, „prea săracă". Ajungem, astfel, la problema de a demonstra că există o infinitate de numere prime.

Această problemă diferă mult de problemele de matematică elementară obișnuite și pare la început inaccesibilă. Dar, după cum am arătat, este cu totul neverosimil să existe un număr prim, îl vom nota cu P, care să fie ultimul. De ce este atît de neverosimil?

Să examinăm clar situația neverosimilă în care, după cum presupunem, ipotetic există un ultim număr prim P. Atunci am putea scrie în întregime șirul complet al numerelor prime: 2, 3, 5, 7, 11, ..., P. De ce este aceasta atît de neverosimil? Ce nu merge aici? Putem oare să indicăm ceva evident greșit? Da, putem. Putem construi numărul

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots P) + 1.$$

Numărul Q este mai mare decît P și deci, după cum am presupus, nu poate fi prim. Așadar, Q trebuie să fie divizibil printr-un număr prim. După ipoteza noastră, toate numerele prime de care dispunem sînt 2, 3, 5, ..., P; însă împărțit prin oricare din aceste numere, Q dă restul 1; prin urmare, Q nu este divizibil prin nici unul dintre numerele prime de mai sus, care, după cum am presupus, sînt toate numerele prime. Așadar, am dat peste ceva evident greșit; Q trebuie să fie ori prim, ori divizibil printr-un număr prim. Plecînd de la presupunerea că există un număr prim P, care este ultimul, am fost conduși la o absurditate manifestă. Cum se explică aceasta? Ipoteza noastră inițială trebuie să fie falsă; nu poate exista un ultim număr prim P. Am reușit astfel să demonstrăm că șirul numerelor prime continuă la infinit.

Este o demonstrație indirectă tipică. (Ea este totodată celebră, datorită lui Euclid; vezi propoziția 20 din cartea IX a *Elementelor*.)

Am stabilit teorema noastră (că șirul numerelor prime este infinit), infirmînd teorema contrară (că șirul numerelor infinite se termină undeva) și am infirmat-o deducînd din ea o absurditate evidentă. Am combinat, astfel, demonstrația indirectă cu reducerea la absurd; combinația aceasta este și ea cît se poate de tipică.

4. *Obiecții.* Procedeele pe care le studiem aici s-au lovit de o opoziție considerabilă. Au fost ridicate numeroase obiecții

care sînt, poate, numai diverse forme ale aceleiași obiecții fundamentale. Vom discuta aici o formă „practică" a obiecției, care ne este accesibilă.

A găsi o demonstrație neevidentă este o realizare intelectuală remarcabilă, însă a învăța o astfel de demonstrație sau chiar a o înțelege bine cere, de asemenea, un important efort intelectual. Natural, vrem să tragem un anumit folos din efortul nostru și, bineînțeles, ceea ce reținem în minte trebuie să fie adevărat și corect, nu fals sau absurd.

Pare însă greu să reținem ceva adevărat dintr-o reducere la absurd. Procedeul pleacă de la o presupunere falsă și deduce din ea consecințe care sînt și ele (poate mai vizibil) false, pînă ajunge la o ultimă consecință, care este manifest falsă. Dacă nu vrem să ne încărcăm memoria cu lucruri false, trebuie să uităm totul cît se poate de repede, ceea ce nu este însă posibil, deoarece toate elementele trebuie ținute minte clar și corect, în tot timpul cînd studiem demonstrația.

Acum putem formula foarte concis obiecția împotriva demonstrațiilor indirecte. Urmărind o astfel de demonstrație sîntem nevoiți să ne concentrăm atenția tot timpul asupra unei presupuneri false, pe care urmează s-o uităm, și nu asupra teoremei adevărate, pe care trebuie s-o reținem.

Dacă vrem să judecăm corect valabilitatea acestor obiecții, trebuie să facem distincție între cele două utilizări ale reducerii la absurd — ca instrument de investigație și ca mijloc de expunere — și să facem aceeași distincție și pentru demonstrația indirectă.

Trebuie să recunoaștem că reducerea la absurd, ca mijloc de expunere, nu este chiar o binefacere. O astfel de reducere, mai ales dacă este lungă, poate deveni efectiv foarte neplăcută pentru cititor sau pentru ascultător. Toate deducțiile pe care le cercetăm rînd pe rînd sînt corecte, dar toate situațiile cu care avem de-a face sînt imposibile. Chiar exprimarea verbală poate deveni obositoare, dacă insistă — cum este normal — să sublinieze că totul este întemeiat pe o presupunere inițială; cuvintele „ipotetic", „după cum presupunem", „conform celor presupuse" trebuie să apară mereu sau trebuie să aplicăm încontinuu un alt procedeu. Vrem să respingem și să uităm situația, care este imposibilă, dar trebuie s-o ținem minte și s-o cercetăm ca bază pentru pasul următor și această discordanță interioară poate pînă la urmă să devină insuportabilă.

Ar fi însă o prostie să respingem reducerea la absurd ca instrument pentru a face descoperiri. Ea ne vine în minte cu totul natural și ne oferă un rezultat decisiv atunci cînd toate celelalte mijloace par să fie epuizate, după cum am văzut din exemplele de mai sus.

Avem nevoie de oarecare experiență pentru a ne da seama că nu există o opoziție esențială între cele două puncte de vedere. Experiența ne arată că, de obicei, nu este prea greu să convertim o demonstrație indirectă într-una directă sau să restructurăm o demonstrație obținută printr-o lungă reducere la absurd, pentru a ajunge la o formă mai plăcută din care reducerea la absurd poate eventual să dispară cu totul (sau, după pregătirea corespunzătoare, să fie comprimată la cîteva propoziții sugestive).

Pe scurt, dacă vrem să ne utilizăm pe deplin aptitudinile, trebuie să fim familiarizați atît cu reducerea la absurd, cît și cu demonstrația indirectă. Atunci însă cînd am reușit să ajungem la un rezultat datorită uneia dintre aceste metode, nu trebuie să omitem de a arunca o privire retrospectivă asupra soluției, întrebîndu-ne: *Se poate obține rezultatul și pe altă cale?*

Să ilustrăm prin exemple.

5. *Reordonarea unei reduceri la absurd.* Să revenim la raționamentul de la 1. Reducerea la absurd a plecat de la o situație care s-a dovedit pînă la urmă imposibilă. Să desprindem însă din demonstrație partea care este independentă de presupunerea inițială falsă și care conține informație pozitivă. Reconsiderînd ceea ce am făcut, putem descoperi că următoarea propoziție este fără îndoială adevărată: Dacă un șir de numere de cîte una și două cifre este scris în așa fel, încît fiecare cifră să nu apară decît o singură dată, atunci suma șirului este de forma

$$10\,t + (45 - t) = 9\,(t + 5).$$

Așadar, suma este divizibilă prin 9. Jocul de la care am pornit cere însă ca suma să fie 100. Este posibil? Nu, nu este, deoarece 100 nu este divizibil prin 9.

Reducerea la absurd, care ne-a condus la descoperirea acestei argumentări, a dispărut din noua prezentare a demonstrației.

De altfel, un cititor familiarizat cu procedeul „eliminării lui 9" poate aprecia acum dintr-o privire întreaga argumentare.

6. *Transformarea demonstrației indirecte.* Să reluăm raționamentul de la 3. Reconsiderînd cu grijă ceea ce am făcut, putem desprinde elemente ale argumentării care sînt independente de orice presupunere falsă, deși cea mai bună cheie constă în a reconsidera înțelesul problemei inițiale.

Ce vrem să spunem prin afirmația că șirul numerelor prime este infinit? Evident, avem în vedere următoarele: Dacă am obținut o mulțime finită de numere prime, 2, 3, 5, 7, 11, ..., P, unde P este ultimul număr prim pe care l-am găsit, mai există totdeauna încă un număr prim. Așadar, ce trebuie să facem pentru a demonstra existența unei infinități de numere prime? Trebuie să indicăm o cale pentru a găsi un număr prim diferit de toate cele găsite pînă acum. Astfel „problema de demonstrat" pe care o aveam a fost redusă în fapt la o „problemă de aflat": *Fiind date numerele prime* 2, 3, 5, ..., P, *să se afle un nou număr prim* N, *diferit de toate cele date.*

După ce am dat problemei inițiale această formă nouă, am realizat pasul principal. Acum este relativ ușor să vedem cum folosim părțile principale ale argumentării anterioare pentru noul nostru scop. În adevăr, numărul

$$Q = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \ldots P) + 1$$

este cu siguranță divizibil printr-un număr prim. Să luăm — în aceasta constă ideea — un divizor prim al lui Q (de exemplu, pe cel mai mic) și să-l notăm cu N. (Natural, dacă Q se întîmplă să fie prim, atunci $N = Q$.) Evident, împărțit prin oricare dintre numerele prime 2, 3, 5, ..., P, numărul Q dă restul 1, și deci nici unul dintre aceste numere nu poate fi N, care este un divizor al lui Q. Este tocmai ceea ce căutam: N este prim și diferă de toate numerele prime 2, 3, 5, 7, 11, ..., P, găsite pînă acum.

Această demonstrație ne oferă un procedeu clar pentru a prelungi mereu, la infinit, șirul numerelor prime. El nu mai cuprinde nimic indirect, nu ne mai cere să considerăm nici o situație imposibilă. Dar, în esență, procedeul acesta coincide cu demonstrația noastră indirectă de mai sus, căreia am reușit să-i dăm o altă formă.

Reguli de stil. Prima regulă de stil este să avem ceva de spus. A doua regulă de stil este să ne controlăm singuri atunci cînd, din întîmplare, avem de spus două lucruri; să-l spunem întîi pe unul, apoi pe celălalt, nu pe ambele deodată.

Reguli pentru a face descoperiri. Prima regulă este să avem cap și totodată noroc. A doua regulă constă în a fi fermi și în a rezista pînă ne vine o idee revelatoare.

Este bine să reamintim fără menajamente că anumite aspirații sînt lipsite de speranțe. Reguli infailibile pentru a face descoperiri, care să ne conducă la soluția tuturor problemelor de matematică posibile, ar fi mult mai vrednice de dorit decît piatra filozofală, pe care au căutat-o zadarnic alchimiștii. Astfel de reguli ar avea o acțiune magică; dar magia este ceva inexistent. Este un vechi vis al filozofilor de a găsi reguli infailibile, aplicabile la tot felul de probleme; dar acest vis va rămîne totdeauna un vis.

O euristică rezonabilă nu poate să urmărească găsirea unor reguli infailibile; dar ea poate încerca să studieze procedee (operații mintale, pași), care sînt în mod tipic utile în rezolvarea problemelor. Astfel de procedee sînt folosite de orice om cu bun simț, care are suficient interes pentru problema sa. Ele sînt sugerate de anumite întrebări și recomandări stereotipe, la care oamenii inteligenți recurg singuri și pe care profesorii inteligenți le folosesc pentru elevii lor. O culegere de întrebări și recomandări de acest fel, enunțate suficient de general și bine ordonate, poate fi mai puțin vrednică de dorit decît piatra filozofală, dar este realizabilă. Lista pe care o studiem reprezintă o astfel de culegere.

Reguli pentru profesor. Prima regulă pentru profesor este să cunoască ceea ce are de predat. A doua regulă este să cunoască ceva mai mult decît are de predat.

Autorul acestei cărți nu crede că toate regulile de conduită pentru profesori ar fi absolut inutile; altfel, el nu ar fi îndrăznit să scrie o carte întreagă despre conduita profesorilor și a elevilor. Însă nu trebuie uitat că un profesor de matematică trebuie să știe ceva matematică și că un profesor care vrea să imprime elevilor săi o atitudine corectă în abordarea problemelor trebuie să-și fi însușit întîi el o astfel de atitudine.

Reluarea problemei, de la sfîrșit spre început. Dacă vrem să înțelegem comportarea omului, trebuie să o comparăm cu comportamentul animalelor. Și animalele „au probleme" și „rezolvă probleme". Psihologia experimentală a făcut în ultimele decenii progrese esențiale în cercetarea activităților de „rezolvare a problemelor" la diferite animale. Nu putem discuta aici aceste cercetări, dar vom descrie pe scurt un ex-

periment simplu și instructiv, descrierea noastră urmînd să servească drept un fel de comentariu al metodei de analiză sau al metodei de „reluare a problemei, de la sfîrșit spre început". De altfel, această metodă este discutată și în alte locuri ale cărții noastre, sub numele lui *P a p p u s*, căruia îi datorăm o importantă descriere a metodei.

1. Vom încerca să găsim un răspuns la următoarea întrebare complicată: *Cum putem scoate dintr-un rîu exact 6 l de apă, dacă avem numai două vase pentru a o măsura, unul de 4 l și unul de 9 l?*

Să ne imaginăm instrumentele de lucru, cele două vase. (*Ce este dat?*) Ne închipuim două vase cilindrice avînd baza egală și raportul dintre înălțimi egal cu 9 : 4, vezi fig. 20. *Dacă* pe suprafața laterală a fiecărui vas am avea o scară formată din linii orizontale egal depărtate, am putea aprecia după ele nivelul apei și problema noastră ar fi ușoară. Dar nu dispunem de o astfel de scară gradată și, de aceea, mai sîntem departe de soluție.

Nu știm cum să măsurăm exact 6 l; am putea oare măsura altceva? (*Dacă nu putem să rezolvăm problema propusă, încercăm să rezolvăm mai întîi o problemă înrudită. Am putea deduce ceva util din datele problemei?*) Hai să facem totuși ceva, să ne jucăm puțin. Am putea umple complet vasul cel mare și să trecem cît putem de mult în vasul mai mic; am

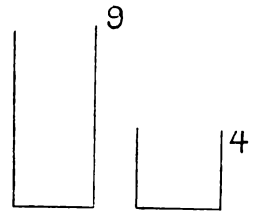

Fig. 20

obține atunci 5 l. Am putea oare obține și 6 l? Avem din nou cele două vase goale. Am putea de asemenea...

Procedăm acum ca cei mai mulți oameni cînd sînt puși în fața acestei enigme. Începem cu cele două vase goale, încercăm cînd una cînd alta, le golim și le umplem, și cînd constatăm că n-am reușit, reîncepem, încercînd altceva. Lucrăm de la început *spre sfîrșit*, de la situația inițială dată, la situația

finală dorită, de la date spre necunoscută. După mai multe încercări este posibil ca, din întîmplare, să reuşim.

2. Însă oamenii deosebit de capabili sau oamenii care au avut norocul să înveţe la lecţiile lor de matematică şi altceva decît operaţii de rutină nu pierd atîta timp cu astfel de încercări, ci inversează problema şi încep să lucreze de la sfîrşit spre început.

Ce ni se cere să facem? (*Care este necunoscuta?*) Să ne închipuim situaţia finală pe care o căutăm, cu toată claritatea

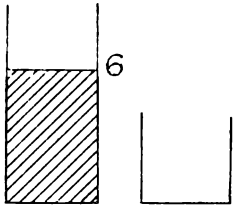

Fig. 21

de care sîntem în stare. Să ne închipuim că avem în faţă vasul mai mare, în care se află exact 6 l, şi vasul mai mic, gol, ca în fig. 21. (*Luăm ca punct de plecare ceea ce este cerut şi considerăm ceea ce căutăm ca fiind gata găsit*, spune Pappus).

De la ce situaţie precedentă am fi putut obţine situaţia finală reprezentată în fig. 21? (*Cercetăm de la ce antecedent ar*

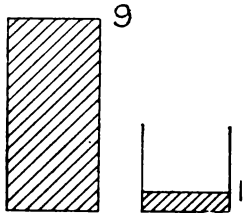

Fig. 22

putea fi dedus rezultatul dorit, spune Pappus). Natural, putem umple vasul mai mare în întregime, adică astfel încît să conţină 9 l. În acest caz, trebuie să ştim însă cum vărsăm din el

exact 3 l. Pentru a realiza aceasta ... trebuie să avem exact un litru în vasul mai mic! Aceasta este ideea. Vezi fig. 22.

(Pasul acesta nu este de loc uşor. Prea puţini oameni sînt în stare să-l facă fără multe ezitări. În adevăr, recunoscînd importanţa acestui pas, prevedem linia generală a soluţiei).

Dar cum putem ajunge la situaţia pe care am găsit-o şi am ilustrat-o prin fig. 22? (*Căutăm din nou care ar putea fi antecedentul acestui antecedent.*) Dat fiind că apa din rîu este pentru

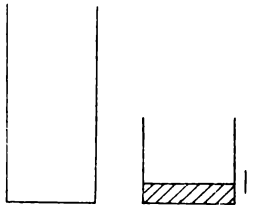

Fig. 23

noi, practic, în cantitate infinită, situaţia din fig. 22 poate fi redusă la cea din fig. 23 sau la cea din fig. 24.

Se observă uşor că dacă am obţine una dintre situaţiile din fig. 22, 23, 24, oricare alta poate fi obţinută tot atît de bine, dar nu este uşor să ajungem la fig. 24 *dacă nu am mai întîlnit-o anterior* dacă nu am dat peste ea din întîmplare

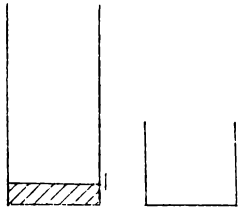

Fig. 24

într-una din încercările noastre iniţiale. Pe cînd ne jucam cu cele două vase, am obţinut poate ceva asemănător şi ne amintim acum, la momentul potrivit, că situaţia din fig. 24 se poate realiza aşa cum se arată în fig. 25: umplem vasul mai mare în întregime, vărsăm din el 4 l în vasul mai mic şi-l

deşertăm apoi pe acesta în rîu, şi repetăm operaţia. *Ajungem eventual la ceva dinainte cunoscut* (sînt cuvintele lui Pappus) şi urmînd metoda analizei, *lucrînd de la sfîrşit spre început*, am descoperit succesiunea adecvată a operaţiilor.

E drept, am descoperit succesiunea potrivită în ordine regresivă şi ne mai rămîne doar *să inversăm ordinea procesului şi să plecăm de la punctul la care am ajuns la sfîrşitul analizei*

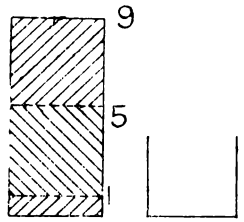

Fig. 25

(cum spune Pappus). Întîi efectuăm operaţiile sugerate de fig. 25 şi obţinem fig. 24; trecem apoi la fig. 23, pe urmă la fig. 22 şi, în sfîrşit, la fig. 21. *Străbătînd drumul în sens invers reuşim să ajungem pînă la urmă la ceea ce se cerea.*

3. Tradiţia din Grecia antică atribuia lui Platon descoperirea metodei analizei. Poate că nu este tocmai adevărat, dar în orice caz, dacă metoda nu a fost inventată de Platon, vreun învăţat grec a găsit de cuviinţă să atribuie unui geniu filozofic invenţia acestei metode.

Această metodă conţine cu siguranţă ceva profund. Există o anumită dificultate psihologică în a inversa, în a pleca de la scop, în a lucra de la sfîrşit spre început, în a nu urma drumul direct spre ţelul dorit. După ce am descoperit succesiunea de operaţii corespunzătoare, mintea noastră trebuie să procedeze în ordinea exact inversă realizării efective. Avem un fel de repulsie psihologică faţă de această ordine inversă, care ar putea împiedica chiar un elev capabil de a înţelege metoda, dacă nu-i este explicată cu pricepere.

Dar nu este nevoie de geniu pentru a rezolva o problemă concretă, lucrînd de la sfîrşit spre început; oricine o poate face, cu puţin bun-simţ. Ne concentrăm atenţia asupra scopului, ne imaginăm poziţia finală în care am vrea să ne aflăm. Din ce poziţie iniţială am putea ajunge aici? Este natural să

ne punem această întrebare şi punîndu-ne-o, lucrăm de la sfîrşit spre început. Rezolvarea unor probleme destul de simple ne poate conduce natural să lucrăm în acest fel. Vezi *P a p p u s*, 4.

A lucra în ordine inversă este o metodă inspirată de bunul-simţ, accesibilă oricui şi ne vine greu să credem că ea nu ar fi fost întrebuinţată de matematicieni şi de nematematicieni, încă înaintea lui Platon. Ceea ce presupusul nostru învăţat grec va fi considerat drept o realizare demnă de geniul lui Platon este formularea procedeului în termeni generali şi consacrarea lui ca o operaţie tipic utilă în rezolvarea unor probleme matematice şi nematematice.

4. Şi acum ne vom întoarce la experimentul psihologic, — dacă trecerea de la Platon la cîini, găini şi cimpanzei nu va părea prea bruscă. Un gard ocoleşte trei laturi ale unui dreptunghi, dar lasă deschisă latura a patra, aşa cum se vede în fig. 26. Aşezăm un cîine de o parte a gardului, în punctul *C* şi ceva hrană de cealaltă parte, în punctul *H*. Problema este destul de uşoară pentru cîine. Întîi, el va lua poziţia pentru a sări direct la hrană, pe urmă însă se va întoarce repede, va alerga spre capătul gardului şi, ocolindu-l se va duce direct la

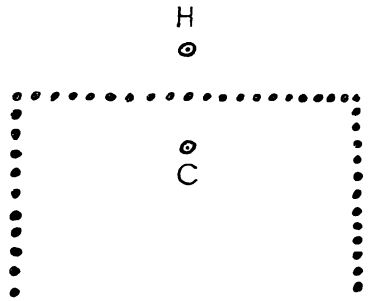

Fig. 26

hrană. Dar cîteodată, mai ales cînd punctele *C* şi *H* sînt aproape unul de celălalt, soluţia nu este chiar atît de simplă; cîinele va pierde un anumit timp lătrînd, zgîriind sau sărind fără rost spre gard, înainte de „a avea ideea revelatoare" (cum am spune noi) de a-l ocoli.

Este interesant să comparăm comportarea a diferite animale puse în locul cîinelui. Problema este foarte uşoară pentru

un cimpanzeu sau pentru un copil de 4 ani (pentru acesta, o jucărie este o nadă mai atrăgătoare decît mîncarea). Problema devine însă surprinzător de grea pentru o găină, care aleargă de colo pînă colo, iritată de aceeași parte a gardului și poate pierde foarte mult timp pînă ajunge la hrană, presupunînd că reușește pînă la urmă. Dacă are însă succes, după multă alergătură, acesta este pur întîmplător.

5. Nu vom construi o teorie serioasă pe baza unui singur experiment simplu, pe care l-am relatat sumar. Dar nu va fi lipsit de folos să remarcăm unele analogii evidente, cu condiția de a fi dispuși să le reverificăm și să le reconsiderăm.

Ocolirea obstacolelor este un procedeu la care recurgem în rezolvarea oricărui fel de probleme. Experimentul de mai sus are oarecum o valoare de simbol. Găina acționează ca oamenii care-și rezolvă problema trecînd apa dintr-un vas în altul, încercînd mereu și mereu și reușind, poate, datorită unei întîmplări fericite, fără a înțelege prea mult motivul succesului lor. Cîinele care zgîria gardul, sărea și lătra înainte de a-l ocoli, și-a rezolvat problema cam tot atît de bine cum am rezolvat noi problema celor două vase. Scara gradată după care să citim nivelul apei din vasele noastre era numai un fel de scormonire inutilă, care ne-a arătat doar că ceea ce căutăm nu se află la suprafață, ci la un nivel mai profund. Am încercat, de asemenea, să lucrăm de la început spre sfîrșit și abia pe urmă ne-a venit ideea să inversăm. Nu știu dacă este sau nu adevărat, dar cîinele care, după o scurtă examinare a situației a ocolit gardul și s-a repezit la hrană, dă impresia unei perspicacități superioare.

Nici găina nu trebuie disprețuită pentru lipsa ei de inteligență. Există o anumită dificultate în a ocoli, în a întoarce spatele țintei, în a înainta fără a privi mereu țelul, în a nu urma drumul direct spre scopul dorit. Analogia dintre dificultățile găinii și dificultățile noastre este evidentă.

S-ar putea reformula problema? *Am putea s-o reformulăm oarecum altfel?* Aceste întrebări orientează spre *Modificări ale problemei*, potrivite scopului nostru.

Să revenim la definiții. Vezi *Definiția.*

Să cercetăm necunoscuta. Este un sfat vechi; zicătoarea latină corespunzătoare este *respice finem*. Adică, să ai în vedere

sfîrșitul. Țineți minte scopul. Nu uitați țelul. Gîndiți-vă la ceea ce vreți să obțineți. Nu pierdeți din vedere ceea ce vi se cere. Țineți minte pentru ce lucrați. *Să cercetăm necunoscuta. Să cercetăm concluzia.* Ultimele două versiuni ale lui *respice finem* sînt special adaptate pentru probleme de matematică, respectiv pentru „probleme de aflat" și pentru „probleme de demonstrat".

Îndreptîndu-ne atenția spre scopul nostru și făcînd un efort de voință în direcția țelului, ne gîndim la căile și la mijloacele prin care îl putem atinge. Prin ce mijloace ne putem atinge scopul? Cum ne putem atinge țelul? Cum putem obține un rezultat de acest fel? Ce cauze pot determina un astfel de rezultat? Unde am mai văzut un astfel de rezultat? Ce obișnuiesc oamenii să facă pentru a obține un astfel de rezultat. *Și să ne gîndim la o problemă cunoscută avînd aceeași necunoscută sau una similară. Și să ne gîndim la o teoremă cunoscută, avînd aceeași concluzie, sau una similară.* Ultimele două versiuni sînt iarăși special adaptate respectiv la „problemele de aflat" și la „problemele de demonstrat".

1. Vom considera probleme de matematică, „probleme de aflat", și recomandarea: *Să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută.* Vom compara această recomandare cu cea conținută în întrebarea: *Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

Această din urmă recomandare este mai generală decît prima. Dacă o problemă este înrudită cu o altă problemă, ele au ceva în comun; ele pot cuprinde cîteva obiecte sau noțiuni comune, pot avea date comune sau o anumită parte a condiției etc. Prima noastră recomandare insistă asupra unui punct comun particular: cele două probleme trebuie să aibă aceeași necunoscută. Cu alte cuvinte, în ambele cazuri, necunoscuta trebuie să fie un obiect de aceeași natură, de exemplu în ambele cazuri lungimea unui segment de dreaptă.

În comparație cu recomandarea generală, cea particulară prezintă o oarecare economie.

În primul rînd, ne scutim de un anumit efort la reprezentarea problemei; nu trebuie să ne uităm deodată la întreaga problemă, ci numai la necunoscută. Problema ne apare schematic astfel:

„Se dau ..... să se afle lungimea unui segment".

În al doilea rînd, avem aici o anumită economie în alegere. Foarte multe probleme pot fi înrudite cu a noastră, pot avea

cu ea în comun un punct sau altul. Cercetînd necunoscuta însă, ne restrîngem alegerea; luăm în considerare numai probleme avînd aceeași necunoscută. Și, natural, printre problemele cu aceeași necunoscută le considerăm întîi pe cele care sînt mai elementare și mai bine cunoscute.

2. Problema pe care o avem în față este de forma

„Se dau ..... să se afle lungimea unui segment"

Cele mai simple și mai bine cunoscute probleme de acest gen se referă la triunghiuri: fiind date trei elemente constitutive ale unui triunghi, să se afle lungimea unei laturi. Dacă ne amintim de aceasta, am găsi ceva care se poate dovedi util: *iată o problemă înrudită cu a noastră și rezolvată anterior. Am putea s-o folosim? Am putea să-i utilizăm rezultatul?* Pentru a putea folosi rezultate cunoscute despre triunghiuri, figura noastră trebuie să conțină un triunghi. Există aici vreun triunghi? Sau este cazul să introducem unul pentru a putea utiliza rezultatele cunoscute? *Nu putem să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*

Există mai multe probleme simple în care necunoscuta este latura unui triunghi. (Ele diferă una de alta prin datele lor. Pot fi date două unghiuri și o latură sau două laturi și un unghi sau pot diferi prin poziția unghiului față de laturile date. În plus, toate aceste probleme sînt deosebit de simple în cazul triunghiului dreptunghic.) Îndreptîndu-ne atenția asupra problemei pe care o avem în față, încercăm să aflăm ce fel de triunghi trebuie să introducem, ce problemă rezolvată anterior (avînd aceeași necunoscută ca și a noastră) ar putea fi adaptată mai convenabil la scopul nostru actual.

După ce am introdus un triunghi auxiliar corespunzător, se poate întîmpla să nu cunoaștem încă trei dintre elementele sale. Aceasta însă nu este absolut necesar; dacă prevedem că elementele care ne lipsesc vor putea fi obținute în vreun fel, am făcut un important pas înainte, avem un plan al soluției.

3. Abordarea schițată în cele de mai sus (la 1 și la 2) este ilustrată, în esență, la pct. **10** (ilustrarea este întrucîtva neclară, din cauza încetinelii elevilor). Nu este de loc greu să imaginăm mai multe exemple similare. În fapt, soluția aproape a tuturor „problemelor de aflat" care se dau de obicei în clasele inferioare poate fi declanșată prin folosirea adecvată a recomandării: *Și să ne gîndim la o problemă cunoscută avînd aceeași necunoscută sau una similară.*

Trebuie să facem o schemă a acestor probleme și să începem prin a cerceta necunoscuta:

(1) Se dau ..... să se afle lungimea unui segment.
(2) Se dau ..... să se afle un unghi.
(3) Se dau ..... să se afle volumul unui tetraedru.
(4) Se dau ..... . să se construiască un punct.

Dacă avem oarecare experiență în problemele elementare de matematică, ne vom reaminti ușor una sau mai multe probleme simple și cunoscute, care au aceeași necunoscută. Dacă problema noastră nu este una dintre aceste probleme simple și binecunoscute, căutăm în mod natural să recurgem la ceea ce ne este binecunoscut și să profităm de rezultatul acestor probleme simple. Încercăm să introducem în problemă ceva binecunoscut și util, și astfel ne-am asigurat un start bun.

În fiecare dintre cele patru cazuri menționate aici, planul soluției este evident, avem o conjectură plauzibilă asupra desfășurării ulterioare a soluției.

(1) Necunoscuta trebuie determinată ca latură a unui triunghi. Nu ne rămîne decît să introducem un triunghi adecvat, cu trei elemente cunoscute sau ușor de obținut.

(2) Necunoscuta trebuie determinată ca unghi al unui triunghi. Mai rămîne să introducem un triunghi corespunzător.

(3) Necunoscuta poate fi obținută dacă sînt cunoscute aria bazei și lungimea înălțimii. Ne rămîne să găsim aria unei fețe și înălțimea corespunzătoare.

(4) Necunoscuta trebuie obținută ca intersecție a două locuri geometrice care pot fi fiecare un cerc sau o dreaptă. Ne rămîne să stabilim cum să desprindem astfel de locuri geometrice din condiție.

În toate aceste cazuri, planul este sugerat de o problemă simplă, avînd aceeași necunoscută și de dorința de a folosi rezultatul sau metoda ei. Urmînd un astfel de plan, ne putem lovi de greutăți, bineînțeles, dar avem o anumită idee de la care să pornim, și aceasta reprezintă un avantaj important.

4. Nu dispunem de un astfel de avantaj dacă nu găsim o problemă avînd aceeași necunoscută și rezolvată anterior. În astfel de cazuri este mult mai greu să abordăm problema.

„Să se afle aria suprafeței unei sfere de rază dată". Este o problemă pe care a rezolvat-o Arhimede. Cu greu putem găsi o problemă mai simplă cu aceeași necunoscută și este sigur că

nu exista o astfel de problemă mai simplă la care să fi recurs Arhimede. În adevăr, soluția lui Arhimede poate fi considerată drept una dintre cele mai remarcabile realizări ale matematicii.

„Să se afle aria suprafeței unei sfere înscrise într-un tetraedru, ale cărui muchii sînt date". Dacă ne este cunoscut rezultatul lui Arhimede, nu avem nevoie de geniul lui pentru a rezolva problema; nu avem decît să exprimăm raza sferei înscrise în funcție de cele șase muchii ale tetraedrului. Nu este tocmai ușor, dar dificultatea nu poate fi comparată cu cea a problemei lui Arhimede.

Singura deosebire dintre o problemă ușoară și una grea constă în a cunoaște sau nu o problemă rezolvată anterior și având aceeași necunoscută.

5. Cînd Arhimede a aflat aria suprafeței unei sfere, el nu cunoștea, după cum am menționat mai sus, nici o problemă cu aceeași necunoscută rezolvată anterior. Dar cunoștea diverse probleme având o necunoscută similară și rezolvate anterior. Există suprafețe curbe a căror arie se obține mai ușor decît cea a sferei și care erau binecunoscute pe vremea lui Arhimede: suprafața laterală a unui cilindru circular drept, a unui con circular drept, a trunchiului unui astfel de con. Putem fi siguri că Arhimede a analizat cu grijă aceste cazuri similare mai simple. În adevăr, în soluția sa, el ia drept aproximare a sferei un corp solid compus, format din două conuri și din mai multe trunchiuri de con (vezi *Definiția*, 6).

Dacă nu izbutim să găsim o problemă având aceeași necunoscută cu problema noastră și rezolvată anterior, căutăm una cu o necunoscută similară. Problemele de acest fel sînt înrudite mai de departe cu problema pe care o avem în față decît cele care au aceeași necunoscută și, de aceea, sînt mai greu de folosit în general pentru scopul nostru, dar ele pot constitui o îndrumare valoroasă.

6. Adăugăm cîteva observații referitoare la „problemele de demonstrat"; ele sînt analoge cu comentariile mai ample de mai sus despre „problemele de aflat".

Avem de demonstrat (sau de infirmat) o teoremă enunțată clar. Orice teoremă demonstrată în trecut și care este întrucîtva înrudită cu teorema noastră are șanse de a se arăta utilă. Dar ne putem aștepta ca serviciul cel mai mare să ni-l facă teoremele având aceeași concluzie ca și a noastră. Știind aceasta, *cercetăm concluzia*, adică analizăm teorema, punînd în

evidență concluzia. Calea pe care cercetăm teorema poate fi exprimată schematic astfel:

„Dacă ..... atunci unghiurile sînt egale".

Ne concentrăm atenția asupra concluziei din fața noastră și încercăm *să ne gîndim la o teoremă cunoscută, avînd aceeași concluzie sau una similară.* În special, încercăm să ne gîndim la teoreme cunoscute și foarte simple de acest fel.

În cazul nostru, există diverse teoreme de acest gen și ne putem aminti de următoarea: „Dacă două triunghiuri sînt egale, unghiurile omoloage sînt egale". *Iată o teoremă înrudită cu a noastră și demonstrată anterior. Am putea să o folosim? Nu am putea să introducem vreun element auxiliar pentru a o face utilizabilă?*

Urmînd aceste recomandări și încercînd să ne dăm seama în ce măsură ne poate ajuta torema de care ne-am reamintit, putem concepe un plan: vom încerca să demonstrăm egalitatea unghiurilor care ne interesează, pe baza unor triunghiuri egale. Vedem că trebuie să introducem o pereche de triunghiuri care să conțină unghiurile respective și să demonstrăm că sînt egale. Un astfel de plan este cu siguranță bun ca punct de plecare și ne poate duce eventual la scopul dorit, ca la pct. **19**.

7. Să rezumăm. Aducîndu-ne aminte de probleme rezolvate anterior și avînd aceeași necunoscută sau una similară (teoreme demonstrate anterior avînd aceeași concluzie sau una similară), avem șanse bune de a porni în direcția corespunzătoare și putem concepe un plan al soluției. În cazurile simple, care sînt cele mai frecvente în clasele inferioare, cele mai elementare probleme cu aceeași necunoscută (cele mai elementare teoreme cu aceeași concluzie) sînt, de obicei, suficiente. Încercarea de a ne aminti o problemă cu aceeași necunoscută este un procedeu evident și care derivă din bunul simț (cf. cu cele menționate în aceeași privință la pct. **4**). Este surprinzător că un procedeu atît de simplu și de util nu este mai larg cunoscut; autorul înclină să creadă că acest procedeu nu a fost niciodată enunțat înainte în toată generalitatea sa. Oricum ar fi, nici elevii, nici profesorii de matematică nu-și pot permite să nu cunoască utilizarea corespunzătoare a recomandărilor: *Să cercetăm necunoscuta și să ne gîndim la o problemă cunoscută avînd aceeași necunoscută sau una similară.*

Să facem un desen; vezi *Figurile*. *Să introducem notații corespunzătoare*; vezi *Notațiile*.

Să separăm diversele părți ale condiției. Prima noastră datorie este să înțelegem problema. După ce am înțeles problema în ansamblu intrăm în amănunte. Considerăm părțile ei principale — necunoscuta, datele, condiția, — fiecare separat. Cînd aceste părți s-au cristalizat bine în mintea noastră, dar nu ne-a venit încă nici o idee deosebit de utilă, trecem la alte amănunte. Considerăm diversele date fiecare în parte. După ce am înțeles condiția în ansamblu, *separăm diversele ei părți* și analizăm fiecare parte ca atare.

Ne dăm seama acum de rolul recomandării pe care o discutăm aici. Ea tinde să declanșeze un pas pe care e necesar să-l facem cînd încercăm să vedem problema distinct și trebuie să intrăm în amănunte din ce în ce mai fine. Este un pas de *Descompunere și recombinare*.

Să separăm diversele părți ale condiției. Putem să le transcriem în limbaj matematic? Avem adesea ocazia să ne întrebăm astfel în stadiul de *Punere în ecuație*.

Se poate deduce ceva util din datele problemei? Avem în față o problemă nerezolvată, o întrebare deschisă. Trebuie *să găsim legătura dintre date și necunoscută*. Putem reprezenta problema noastră ca un spațiu gol între date și necunoscută, ca pe o prăpastie peste care urmează să aruncăm un pod. Putem începe construcția podului dintr-o parte sau din cealaltă, de la necunoscută sau de la date.

Să cercetăm necunoscuta! *Și să ne gîndim la o problemă cunoscută, avînd aceeași necunoscută sau una similară*. Aceasta ne sugerează să pornim de la necunoscută.

Să cercetăm datele! *Am putea deduce ceva util din datele problemei*? Aceasta ne sugerează să pornim de la date.

Constatăm că a începe raționamentul de la necunoscută este, de obicei, preferabil (vezi *Pappus* și *Reluarea problemei, de la sfîrșit spre început*). Însă alternativa de a porni de la date are și ea șanse de succes, trebuie adesea încercată și merită să fie ilustrată.

Exemplu. Se dau trei puncte A, B și C. Să se ducă o dreaptă prin A, care să treacă printre punctele B și C, la distanță egală de ele.

Care sînt datele? Trei puncte, A, B și C, a căror poziție este dată. Facem un desen, care să cuprindă datele (fig. 27).

Care este necunoscuta? O dreaptă.

Care este condiția? Dreapta cerută trece prin A și între B și C, la distanță egală de aceste două puncte. Reprezentăm necunoscuta și datele într-o figură care să conțină relația cerută (fig. 28). Figura noastră, inspirată din *definiția* distanței unui punct la o dreaptă, ne indică unghiurile drepte despre care vorbește această definiție.

Figura, așa cum am desenat-o, este „prea goală". Dreapta necunoscută nu este suficient de strîns legată de datele A, B, C.

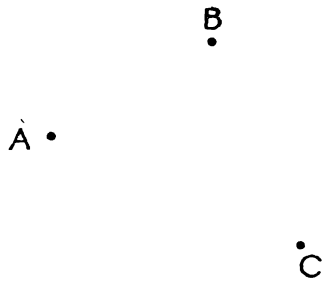

Fig. 27

Este nevoie de o linie auxiliară în figură, trebuie adăugat ceva — dar ce anume? Chiar un elev destul de bun poate să dea greș aici. Natural, se pot face diverse încercări, dar întrebarea cea mai bună pe care i-o putem pune este: *Am putea deduce ceva util din datele problemei*?

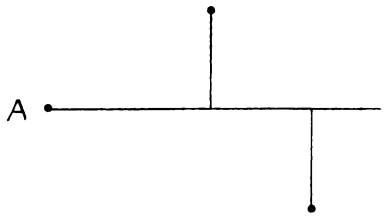

Fig. 28

Care sînt, propriu-zis, datele? Cele trei puncte din fig. 27, și nimic mai mult. Nu am utilizat încă suficient punctele B și C; trebuie să deducem ceva util din ele. Dar ce se poate face

cu două puncte? Să le unim printr-o dreaptă. Astfel, obținem fig. 29.

Dacă suprapunem fig. 28 și fig. 29, soluția ne va apărea dintr-odată: avem două triunghiuri dreptunghice, care sînt egale și avem un nou punct de intersecție de importanță fundamentală.

Se poate folosi rezultatul? A găsi soluția unei probleme prin propriile noastre mijloace înseamnă a face o descoperire. Dacă problema nu este grea, descoperirea nu este atît de mare,

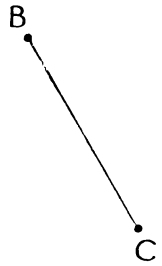

Fig. 29

dar rămîne totuși o descoperire. După ce am făcut o descoperire, chiar una modestă, nu trebuie să omitem de a cerceta dacă se mai ascunde și altceva îndărătul ei, nu trebuie să pierdem posibilitățile pe care ni le deschide noul rezultat, trebuie să încercăm să folosim din nou procedeul utilizat. Să ne exploatăm succesul. *Se poate folosi rezultatul sau metoda la o altă problemă?*

1. Putem imagina ușor probleme noi, dacă sîntem oarecum familiarizați cu mijloacele principale de a modifica o problemă cum sînt: *Generalizarea, Particularizarea, Analogia, Descompunerea și recombinarea.* Plecăm de la o problemă dată, deducem din ea altele prin mijloacele menționate aici, din problemele obținute deducem altele și așa mai departe. Teoretic, procesul nu are limite, însă practic îl realizăm rareori pînă la stadii mai avansate, deoarece riscăm să ajungem la probleme inaccesibile.

Pe de altă parte, putem construi probleme noi, ușor de rezolvat cu ajutorul soluției unei probleme rezolvate anterior; dar aceste probleme noi și ușoare riscă să fie neinteresante.

Nu este prea ușor să găsim o problemă nouă, care să fie și interesantă și accesibilă; aceasta cere experiență, pricepere și noroc. Totuși, după ce am reușit să rezolvăm o problemă trebuie totdeauna să căutăm alte probleme bune. Problemele bune și ciupercile de anumite specii au o trăsătură comună: cresc în gupuri. Dacă am găsit una, este cazul să ne uităm în jur; avem șanse mari să mai găsim ceva prin apropiere.

2. Vom ilustra cele arătate mai sus cu ajutorul exemplului discutat la pct. **8, 10, 12, 14, 15.** Vom pleca deci de la următoarea problemă:

Fiind date cele trei dimensiuni (lungimea, lățimea și înălțimea) unui paralelipiped dreptunghic să se afle diagonala.

Dacă soluția problemei ne este cunoscută, putem rezolva cu ușurință oricare dintre următoarele probleme (dintre care primele două au mai fost menționate la pct. **14**).

Fiind date cele trei dimensiuni ale unui paralelipiped dreptunghic, să se afle raza sferei circumscrise.

O piramidă are baza dreptunghiulară, iar centrul acesteia este piciorul înălțimii. Fiind date înălțimea piramidei și laturile bazei, să se afle muchiile laterale.

Fiind date coordonatele rectagulare (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) a două puncte din spațiu, să se afle distanța dintre ele.

Rezolvăm ușor aceste probleme, deoarece ele diferă prea puțin de problema inițială, a cărei soluție ne este cunoscută. În fiecare caz adăugăm cîte o nouă noțiune la problema noastră inițială: sferă circumscrisă, piramidă, coordonate rectangulare. Aceste noțiuni se adaugă ușor și se elimină ușor, iar după ce am scăpat de ele, revenim la problema noastră inițială.

Problemele de mai sus prezintă un anumit interes, deoarece noțiunile introduse în problema inițială sînt interesante. Ultima problemă, cea cu distanța dintre două puncte date prin coordonatele lor este chiar importantă, deoarece coordonatele rectangulare sînt importante.

3. Iată o altă problemă ușor de rezolvat, o dată ce cunoaștem soluția problemei noastre inițiale: fiind date lungimea, lățimea și diagonala unui paralelipiped dreptunghic, să se afle înălțimea.

În fond, soluția problemei noastre inițiale constă în stabilirea unei relații între patru mărimi: cele trei dimensiuni ale paralelipipedului și diagonala lui. Fiind date trei din

aceste patru mărimi, o putem calcula pe a patra din relația noastră. Astfel, putem rezolva noua problemă.

Avem aici o schemă pentru a deduce probleme noi și ușor de rezolvat dintr-o problemă pe care am rezolvat-o: considerăm necunoscuta inițială ca fiind dată și una dintre datele inițiale ca fiind necunoscută. Relația dintre necunoscută și date este aceeași în ambele probleme, cea veche și cea nouă. După ce am găsit relația într-o problemă, o putem folosi și în cealaltă.

Această schemă, acest model pentru a deduce probleme noi prin schimbarea rolurilor, este foarte diferită de schema după care ne-am călăuzit la 2.

4. Vom deduce acum probleme noi prin alte mijloace.

O *generalizare* firească a problemei noastre inițiale este următoarea: Să se afle diagonala unui paralelipiped, dacă se dau cele trei muchii concurente la un capăt al diagonalei și cele trei unghiuri formate de muchiile respective.

Prin *particularizare* obținem următoarea problemă: Să se afle diagonala unui cub de muchie dată.

Analogia ne poate conduce la o inepuizabilă varietate de probleme. Iată aici cîteva, deduse din cele considerate la 2: Să se afle diagonala unui octaedru regulat de muchie dată. Să se afle raza sferei circumscrise unui tetraedru regulat de muchie dată. Fiind date coordonatele geografice — latitudinea și longitudinea — a două puncte de pe suprafața terestră (pe care o considerăm sferică) să se afle distanța lor sferică.

Toate aceste probleme sînt interesante, însă numai cea obținută prin particularizare poate fi rezolvată direct pe baza soluției problemei inițiale.

5. Putem deduce probleme noi dintr-o problemă dată, considerînd unele elemente ca variabile.

Un caz particular al uneia dintre problemele de la 2 constă din a afla raza sferei circumscrise unui cub de muchie dată. Să considerăm cubul și centrul comun al cubului și al sferei ca fiind fixe, făcînd raza sferei să varieze. Dacă raza sferei este mică, sfera este interioară cubului. Pe măsură ce raza crește, sfera se întinde (ca un balon pe care-l umflăm). La un anumit moment, sfera devine tangentă la fețele cubului; ceva mai tîrziu, ea este tangentă la muchii; mai tîrziu sfera trece prin vîrfuri. Ce valori trebuie să ia raza în aceste trei momente critice?

6. Experiența unui elev în domeniul matematicii este incompletă, dacă el n-a avut niciodată ocazia să rezolve o

problemă pe care a inventat-o singur. Profesorul poate arăta cum se deduce o problemă nouă dintr-una rezolvată înainte, stimulînd astfel curiozitatea elevilor. De asemenea, profesorul poate lăsa elevilor o parte din invenție. De exemplu, el poate vorbi despre sfera în expansiune prezentată mai sus (de la 5), întrebînd apoi: „Ce ați încerca să calculați? Ce valoare a razei este deosebit de interesantă?"

Se poate obține rezultatul și pe altă cale? Dacă soluția pe care am obținut-o însfîrșit este lungă și greoaie, bănuim, în mod firesc, că există o altă soluție mai clară și mai directă: *Se poate obține rezultatul și pe altă cale? Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire?* Dar și atunci cînd am reușit să găsim o soluție satisfăcătoare, avem interesul să mai găsim și alta. Vrem să ne convingem de valabilitatea unui rezultat teoretic prin două deducții diferite, după cum vrem să percepem un obiect material prin intermediul a două organe de simț. După ce am găsit o demonstrație, vrem să mai găsim și alta, după cum vrem să atingem un obiect pe care pînă acum doar l-am văzut.

Două demonstrații sînt mai bune decît una singură. „Este mai sigur să navighezi cu două ancore".

1. *Exemplu.* Să se afle aria S a suprafeței laterale a unui trunchi de con circular drept, fiind date raza bazei inferioare R, raza bazei superioare r și înălțimea h.

Problema se poate rezolva prin diferite metode. Bunăoară, se poate să cunoaștem formula suprafeței laterale a conului întreg. Deoarece trunchiul este generat prin tăierea din con a unui con mai mic, suprafața lui laterală va fi diferența dintre două suprafețe conice complete; ne mai rămîne să exprimăm aceasta prin R, r, h. Realizînd această idee, obținem pînă la urmă formula

$$S = \pi (R + r) \sqrt{(R - r)^2 + h^2}.$$

După ce am ajuns la acest rezultat, pe o cale sau pe alta, după calcule mai lungi, dorim o deducție mai clară și mai directă. *Se poate obține rezultatul și pe altă cale? Ne putem da seama de aceasta dintr-o privire?*

Dacă vrem să ne reprezentăm intuitiv întregul rezultat, putem începe prin a încerca să ne dăm seama de semnificația geometrică a părților sale. Vom observa astfel că

$$\sqrt{(R - r)^2 + h^2}$$

este lungimea *generatoarei*. (Generatoarea este una dintre laturile neparalele ale trapezului isoscel care, rotindu-se în jurul liniei ce unește mijloacele laturilor paralele, generează trunchiul de con; vezi fig. 30.) De asemenea, putem constata că

$$\pi\,(R + r) = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2}$$

este media aritmetică a perimetrelor celor două baze ale trun-

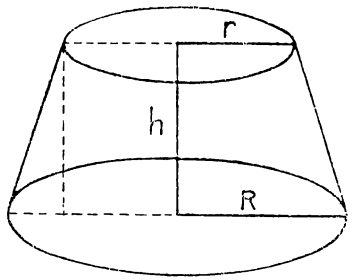

Fig. 30

chiului. Examinînd cei doi membri ai formulei, ne poate veni în minte să-i dăm și forma

$$\pi\,(R + r) = 2\pi\frac{R + r}{2}$$

acesta este *perimetrul secțiunii mediane* a trunchiului. (Numim aici secțiune mediană intersecția trunchiului de con cu un plan care este paralel cu bazele și trece prin mijlocul înălțimii.)

După ce am găsit noi interpretări pentru diversele părți, ansamblul formulei ne apare într-o nouă lumină. O putem citi astfel:

Aria = Perimetrul secțiunii mijlocii × Generatoarea.
Ne putem aminti aici de regula pentru trapez:
Aria = Linia mijlocie × Înălțimea.

(Linia mijlocie este paralelă cu cele două laturi paralele ale trapezului și taie înălțimea în două părți egale.) După ce am văzut intuitiv analogia dintre ambele enunțuri, cel referitor

la trunchiul de con și cel referitor la trapez, cuprindem „aproape dintr-o privire" întregul rezultat pentru trunchiul de con. Adică simțim că sîntem foarte aproape acum de o demonstrație scurtă și directă a rezultatului la care am ajuns printr-un calcul lung.

2. Exemplul de mai sus este tipic. Nefiind pe deplin satisfăcuți de felul cum am obținut rezultatul, vrem să-l îmbunătățim, să-l modificăm. De aceea, studiem rezultatul, căutăm să-l înțelegem mai bine, să-l vedem sub un alt aspect. La început, putem reuși să observăm o nouă interpretare a unei părți mici din rezultat. Apoi, putem fi destul de norocoși pentru a descoperi un nou mod de a concepe alte părți ale lui.

Analizînd rînd pe rînd diversele părți și adoptînd diferite căi pentru a le considera, putem fi conduși pînă la urmă să vedem întregul rezultat într-o nouă lumină, iar noua concepție asupra rezultatului ne poate sugera o nouă demonstrație.

Trebuie să mărturisim că toate acestea au o probabilitate mai mare să i se întîmple unui matematician cu experiență, care lucrează la o problemă dificilă și subtilă, decît unui începător care se zbate cu o problemă elementară. Matematicianul care posedă cunoștințe bogate este mai expus decît începătorul pericolului de a mobiliza prea multe cunoștințe de a complica prea mult argumentarea. În schimb însă, matematicianul cu experiență este avantajat față de începător în ceea ce privește aprecierea reinterpretării unei mici părți a rezultatului și în a proceda, pe baza acumulării unor astfel de mici avantaje, la restructurarea întregului rezultat.

Totuși, și în clasele elementare se poate întîmpla ca elevii să prezinte o soluție peste măsură de complicată. În acest caz, profesorul trebuie să le arate, cel puțin odată sau de două ori, nu numai cum să rezolve problema mai scurt, ci și cum să găsească în rezultatul obținut indicații pentru o soluție mai scurtă.

Vezi și *Reducerea la absurd și demonstrația indirectă.*

Se poate verifica rezultatul? *Putem verifica argumentarea?* Un răspuns bun la aceste întrebări întărește încrederea noastră în soluție și contribuie la temeinicia cunoștințelor noastre.

1. Rezultatele numerice ale problemelor de matematică se pot verifica prin comparație cu numere observate sau cu o evaluare pe baza bunului simț a unor numere observabile. Dat fiind că problemele apărute din nevoi practice sau din

curiozitatea noastră naturală au aproape totdeauna de-a face cu fapte, ne putem aștepta ca această confruntare cu faptele observabile să nu fie decît arareori omisă. Dar orice profesor știe că elevii sînt capabili de lucruri inimaginabile în această privință. Unii elevi nu se tulbură de loc dacă obțin 4919 m pentru lungimea unei nave și vîrsta de 8 ani și 2 luni pentru căpitanul ei, despre care știu, în plus, că este bunic. Această desconsiderare a unor lucruri evidente nu dovedește neapărat prostie, ci mai curînd indiferență față de problemele artificiale.

2. Problemele „cu litere" sînt susceptibile de verificări mai numeroase și mai interesante decît problemele „cu numere" (pct. **14**). Ca exemplu vom considera un trunchi de piramidă cu baza pătrată. Dacă latura bazei inferioare este a, latura baze superioare b și înălțimea trunchiului h, obținem pentru volum

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} h.$$

Putem verifica acest rezultat prin *Particularizare*. Pentru $b = a$, trunchiul de piramidă devine prismă și formula ne dă volumul a^2h; pentru $b = 0$, trunchiul devine o piramidă, și formula ne dă $a^2h/3$. Putem aplica *Verificarea cu ajutorul dimensiunii*. În adevăr, expresia are ca dimensiune cubul unei lungimi. De asemenea putem verifica formula *variind datele*. În adevăr, dacă una dintre mărimile pozitive a, b, h crește, valoarea expresiei crește.

Verificările de acest gen sînt aplicabile nu numai rezultatului final, ci și rezultatelor intermediare. Ele sînt atît de utile, încît merită să ne pregătim în vederea lor; vezi *Modificări ale problemei*, 4. Pentru a putea recurge la astfel de verificări, poate fi avantajos să generalizăm o „problemă cu numere", transformînd-o într-o „problemă cu litere"; vezi *Generalizarea*, 3.

3. *Putem verifica argumentarea?* Verificînd pas cu pas argumentarea, adică desfășurarea rezolvării, trebuie să evităm repetările. În primul rînd, simpla repetare este de natură să devină plicticoasă, neinstructivă, împovărătoare pentru atenția noastră. În al doilea rînd, este probabil ca, acolo unde am greșit o dată, să greșim din nou, dacă circumstanțele sînt aceleași. Dacă simțim nevoia să reluăm întreaga argumentare pas cu pas, trebuie cel puțin să schimbăm ordinea pașilor, sau gruparea lor, să introducem o oarecare variație.

4. Avem nevoie de un efort mai mic și este mai interesant să extragem partea cea mai slabă a argumentării și să începem analiza cu ea. O întrebare foarte folositoare, atunci cînd desprindem diverse puncte din argumentarea noastră, care merită examinate, este: *Au fost utilizate toate datele?*

5. Este clar că cunoștințele noastre nematematice nu pot fi bazate în întregime pe demonstrații formale. Partea cea mai trainică a cunoștințelor noastre zilnice este verificată și întărită mereu prin experiența noastră de toate zilele. Verificările prin observație sînt realizate mai sistematic în științele naturii. Aceste verificări iau forma unor experimente și măsurători îngrijite și sînt îmbinate cu raționamente matematice în fizică. Pot cunoștințele noastre de matematică să fie bazate exclusiv pe demonstrații formale?

Este o problemă filozofică pe care nu o putem discuta aici. Este sigur că cunoștințele dumneavoastră sau cunoștințele mele sau cunoștințele de matematică ale elevilor dumneavoastră nu se bazează numai pe demonstrații formale. Dacă există, în genere, cunoștințe temeinice, ele au o bază experimentală largă și această bază se lărgește datorită fiecărei probleme al cărei rezultat a fost verificat cu succes.

Simetria are două înțelesuri: unul mai uzual, particular, geometric și unul mai puțin uzual, general, logic.

Geometria elementară în spațiu consideră două feluri de simetrii: simetria în raport cu un plan (numit plan de simetrie) și simetria în raport cu un punct (numit centrul de simetrie). Corpul omului pare destul de simetric, dar în realitate nu este; multe organe interne sînt dispuse destul de asimetric. O statuie poate fi perfect simetrică în raport cu un plan vertical, astfel încît cele două jumătăți ale ei pot fi schimbate între ele.

Într-o accepție mai generală a cuvîntului, un întreg se numește simetric dacă părțile sale pot fi schimbate între ele. Există mai multe feluri de simetrie, care diferă prin numărul părților care pot fi schimbate între ele și prin operațiile care schimbă între ele aceste părți. Astfel, un cub are o simetrie de un grad înalt: cele 6 fețe ale sale pot fi schimbate între ele, ca și cele 8 vîrfuri și cele 12 muchii. Expresia

$$yz + zx + xy$$

este simetrică; două oarecare dintre cele trei litere x, y, z pot fi schimbate între ele fără ca expresia să se schimbe.

Simetria, în înțelesul ei general, este importantă pentru studiul nostru. Dacă o problemă este într-un anumit sens simetrică, putem obține un anumit avantaj observînd părțile care pot fi schimbate între ele și merită adesea să aplicăm același tratament părților care joacă același rol (vezi *Elemente auxiliare*, 3).

Încercați să tratați simetric ceea ce este simetric și nu distrugeți niciodată fără motiv o simetrie naturală. Uneori însă sîntem siliți să tratăm nesimetric ceea ce este prin natura sa simetric. O pereche de mănuși prezintă incontestabil simetrie. Totuși nimeni nu mînuiește mănușile exact simetric, nimeni nu-și pune două mănuși în același timp, ci una după cealaltă.

Simetria se poate dovedi folositoare și în verificarea rezultatelor; vezi pct. **14**.

Termenii vechi și noi care descriu activitatea de rezolvare a problemelor sînt adesea ambigui. Această activitate ca atare este cunoscută oricui și este adesea discutată, dar, la fel cu alte activități intelectuale, ea este greu de descris. Din lipsa unui studiu sistematic, nu există termeni tehnici pentru a o descrie, și unii termeni uzuali semitehnici măresc adesea confuzia, deoare sînt folosiți cu înțelesuri diferite de autori diferiți.

Următoarea listă succintă cuprinde cîțiva termeni noi folosiți și cîțiva termeni vechi evitați în studiul de față, precum și unii termeni vechi, menținuți în pofida ambiguității lor.

Cititorul poate încerca nedumeriri în cadrul discuției terminologice de mai jos, dacă noțiunile sale nu sînt bine ancorate în exemple.

1. *Analiza* este definită în mod clar de *Pappus*, și este un termen util, care descrie un procedeu tipic de întocmire a unui plan plecînd de la necunoscută (sau de la concluzie) și lucrînd de la sfîrșit spre început, spre date, sau spre ipoteză. Din nefericire, cuvîntul a căpătat diferite înțelesuri (de exemplu, analiză matematică, chimică, logică) și de aceea am fost nevoiți, cu regret, să-l evităm în studiul nostru.

2. *Condiția* leagă necunoscuta unei „probleme de aflat" cu datele (vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*, 3). În această accepție, ea este, natu-

ral, un termen util și indispensabil. Este adesea necesar să descompunem condiția în mai multe părți [părțile (I) și (II) din exemplele de la *Descompunere și recombinare*, 7, 8]. Orice parte a condiției este denumită în mod obișnuit *și ea* condiție. Această ambiguitate, care creează uneori confuzie, ar putea fi ușor evitată prin introducerea unui termen tehnic pentru părțile întregii condiții; de exemplu, am putea denumi o astfel de parte „clauză".

3. *Ipoteza* este o parte esențială a unei teoreme de matematică de tip obișnuit (vezi *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*, 4.) În această accepție, termenul este perfect clar și satisfăcător. Dificultatea constă în faptul că orice parte a ipotezei se cheamă *și ea* ipoteză, astfel că ipoteza consistă din mai multe ipoteze. Remediul ar consta în a denumi „clauză" sau într-un fel similar fiecare parte a unei ipoteze. (Cf. observația referitoare la „condiție".)

4. *Părțile principale* ale unei probleme sînt definite la *Probleme de aflat, probleme de demonstrat*, 3, 4.

5. *Probleme de aflat, probleme de demonstrat* reprezintă o pereche de termeni noi, pe care i-am introdus cu regret, pentru a înlocui termeni istorici, al căror înțeles însă a devenit cu timpul atît de confuz, încît nu se mai poate reveni la el. În traducerile latine ale textelor matematice grecești, numele comun pentru ambele tipuri de probleme este *propositio*; o „problemă de aflat" se numește *problema*, iar o „problemă de demonstrat" *theorema*. În limbajul matematic vechi, cuvintele propoziție, problemă, teoremă au acest înțeles „euclidian", dar în limbajul matematic modern situația este cu totul alta; introducerea noilor termeni își găsește justificarea în aceasta.

6. *Raționament progresiv* este un termen utilizat cu diverse înțelesuri de diverși autori, printre care de unii cu sensul vechi de „sinteză" (vezi 9). Acest din urmă înțeles poate fi susținut, dar în această carte termenul a fost evitat.

7. *Raționament regresiv* se folosea de către unii autorii cu înțelesul vechi de „analiză" (cf. 1, 6). Termenul poate fi folosit în acest sens, însă noi l-am evitat.

8. *Soluție* este un termen absolut clar, dacă-l luăm în înțelesul său pur matematic; el desemnează orice obiect care satisface condiția unei „probleme de aflat". Astfel, soluțiile ecuației $x - 3x + 2 = 0$ sînt rădăcinile ei, numerele 1 și 2. Din nefericire, cuvîntul are și alte înțelesuri, care nu sînt

pur matematice și pe care matematicienii le folosesc paralel cu înțelesul matematic. Soluție înseamnă și „procesul de rezolvare a unei probleme" sau „munca de rezolvare a unei probleme"; folosim cuvîntul cu acest înțeles atunci cînd vorbim despre o „soluție dificilă". Soluție se cheamă și rezultatul muncii de rezolvare a unei probleme; folosim cuvîntul în acest înțeles cînd vorbim despre o „soluție frumoasă". Se poate întîmpla să fim nevoiți să vorbim în aceeași frază despre obiectul care satisface condiția unei probleme, despre munca pentru a-l obține și despre rezultatul acestei munci; dacă ne vom lăsa ispitiți să denumim toate aceste trei lucruri „soluție", fraza nu va mai fi clară.

9. *Sinteza* este folosită de Pappus cu un înțeles bine definit, care merită să fie păstrat. Spre regretul nostru însă, am evitat termenul în această lucrare, pentru aceleași motive pentru care am renunțat la „analiză" (vezi 1).

Verificarea cu ajutorul dimensiunii este un mijloc binecunoscut pentru a verifica rapid și eficient formulele de geometrie sau de fizică.

1. Pentru a reaminti cum se face operația de verificare, vom considera un trunchi de con circular drept. Fie

R — raza bazei inferioare;
r — raza bazei superioare;
h — înălțimea trunchiului de con;
S — aria suprafeței laterale a trunchiului.

Dacă R, r, h sînt date, S se poate determina ușor. Obținem expresia

$$S = \pi\ (R + r)\sqrt{(R - r)^2 + h^2},$$

căreia vrem să-i aplicăm verificarea prin dimensiune.

Dimensiunea unei mărimi geometrice se stabilește ușor. Astfel, R, r, h sînt lungimi, ele se măsoară în centimetri, (cm). Aria S se măsoară în centimetri pătrați, dimensiunea ei este cm^2. $\pi = 3{,}141\ 59...$ este un număr; dacă vrem să atribuim o dimensiune unei cantități numerice, aceasta va fi $cm^0 = 1$.

Orice termen al unei sume trebuie să aibă aceeași dimensiune ca și întreaga sumă. Astfel, R, r și $R + r$ au aceeași dimensiune, centimetri. Cei doi termeni $(R - r)^2$ și h^2 au aceeași dimensiune (cum este și normal), centimetri pătrați.

Dimensiunea unui produs este produsul dimensiunilor factorilor, iar pentru puteri avem o regulă similară. În-

locuind mărimile prin dimensiunile lor în ambii membri ai formulei pe care o verificăm, obținem

$$cm^2 = 1 \cdot cm \cdot \sqrt{cm^2}$$

Lucrurile stînd evident astfel, verificarea nu poate descoperi nici o eroare în formulă. Formula a trecut cu bine verificarea.

Alte exemple vezi la pct. **14** și la *Se poate verifica rezultatul?* 2.

2. Putem aplica verificarea cu ajutorul dimensiunii rezultatului final al unei probleme sau rezultatelor intermediare, muncii noastre sau muncii altora (metoda este foarte potrivită pentru a găsi greșeli în teze), precum și formulelor pe care ni le reamintim și celor pe care le conjecturăm.

Dacă ne reamintim formulele $4\pi r^2$ și $4\pi r^3/3$ pentru aria și volumul unei sfere, dar nu sîntem siguri ce anume reprezintă fiecare, verificarea prin dimensiune ne va înlătura repede îndoielile.

3. Verificarea prin dimensiune este mai importantă în fizică decît în geometrie.

Să considerăm un pendul matematic, adică un punct material suspendat de un fir a cărui lungime o considerăm invariabilă și a cărui greutate este neglijabilă. Fie l lungimea acestui fir, g accelerația gravitațională și T perioada pendulului.

Considerații mecanice ne arată că T depinde numai de l și de g. Dar care este forma acestei dependențe? Putem să ne amintim sau să ghicim că

$$T = cl^m g^n,$$

unde c, m, n sînt constante numerice. Adică, am presupus că T este proporțional cu puterile l^m și g^n ale lui l și g.

Să examinăm dimensiunile. T fiind un timp, se măsoară în secunde, dimensiunea sa este s. Dimensiunea lungimii l este cm, iar dimensiunea accelerației g este $cm\ s^{-2}$; constanta numerică c are dimensiunea 1. Verificarea cu ajutorul dimensiunii ne dă ecuația

$$s = 1 \cdot (cm)^m\ (cm\ s^{-2})^n$$

sau

$$s = (cm)^{m+n} s^{-2n}.$$

Trebuie să avem aceleași puteri ale unităților fundamentale *cm* și *s* în ambii membri, și astfel obținem

$$0 = m + n \qquad 1 = -2n$$

și deci

$$n = -1/2 \qquad m = 1/2.$$

De aceea, formula pentru perioada T trebuie să fie

$$T = cl^{1/2} g^{-1/2} = c\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Verificarea cu ajutorul dimensiunii ne dă mult în acest caz, dar nu ne poate da totul. În primul rînd, ea nu ne spune nimic despre valoarea constantei c (care este 2π). Apoi, ea nu ne spune nimic despre limitele de valabilitate; formula este bună numai pentru oscilații mici ale pendulului și numai cu aproximație (ea este exactă numai pentru oscilații „infinit mici"). În pofida acestor limitări, nu încape îndoială că considerarea dimensiunilor ne-a permis să prevedem repede și cu mijloacele cele mai elementare partea esențială a unui rezultat a cărui cercetare completă necesită mijloace mult mai complicate. Și situația este aceeași în multe cazuri similare.

Viitorul matematician trebuie să fie priceput în rezolvarea problemelor; aceasta însă nu este suficient. Va veni timpul cînd va avea de rezolvat probleme de matematică serioase; și el trebuie să stabilească întîi care sînt problemele cele mai corespunzătoare inclinațiilor sale naturale.

Pentru el, partea cea mai importantă a muncii este privirea retrospectivă asupra soluției complete. Revăzînd desfășurarea muncii sale și forma finală a soluției, el poate găsi o infinită varietate de lucruri interesante de studiat. El poate medita asupra dificultății problemei și asupra ideii decisive; el poate încerca să vadă ce l-a împiedicat și ce l-a ajutat pînă la urmă. Elevul poate căuta idei intuitive simple: *Putem cuprinde aceasta dintr-o singură privire*? El poate compara și dezvolta diferite metode: *Se poate obține rezultatul și pe altă cale*? El poate încerca să-și clarifice problema la care lucrează, comparînd-o cu altele rezolvate anterior; el poate încerca să inventeze probleme noi, pe care să le rezolve bazîndu-se pe lucrarea recent terminată: *Se poate folosi rezultatul sau metoda pentru vreo altă problemă*? Meditînd cît mai complet asupra problemelor pe care le-a rezolvat, elevul dobîndește cunoștințe bine sistematizate, gata să fie folosite.

Viitorul matematician învață, ca oricare altul, din imitație și din exercițiu. El trebuie să caute un model potrivit pentru a-l imita. El trebuie să urmeze pe un profesor care să-l stimuleze. El trebuie să se întreacă cu un prieten capabil. Lucrul cel mai important este ca elevul, să citească nu numai manualele obișnuite, ci și cărțile unor autori buni, pînă va găsi pe unul pe care să-l imite în conformitate cu inclinațiile sale naturale. Elevul trebuie să se bucure și să caute tot ce i se pare simplu sau instructiv sau frumos. El trebuie să rezolve probleme, să aleagă problemele care se situează pe linia lui, să mediteze asupra soluțiilor și să inventeze probleme noi. Prin aceste mijloace și prin altele, el trebuie să se străduiască pentru a face prima descoperire importantă: trebuie să-și descopere ceea ce îi place și ceea ce nu-i place, să-și descopere gusturile și linia sa proprie.

Partea a IV-a

PROBLEME, INDICAȚII, SOLUȚII

Această din urmă parte îi oferă cititorului o ocazie suplimentară de a se exersa.

Problemele nu presupun din partea cititorului cunoștințe mai mari decît putea dobîndi, dacă și-a însușit bine materia în școala medie. Ele nu sînt însă nici prea ușoare, nici probleme de rutină; unele dintre ele cer orginalitate, și ingeniozitate[1].

Indicațiile oferă îndrumări care duc la rezultat, de cele mai multe ori prin citarea unei propoziții adecvate din listă; ele îi pot revela cititorului atent, dispus să-și însușească recomandările, ideea cheie a soluției.

Soluțiile nu dau numai răspunsul, ci și procedeul care conduce la el, deși, de obicei, cititorul trebuie să completeze singur unele detalii. Unele soluții încearcă să deschidă noi perspective prin cîteva cuvinte adăugate la sfîrșit.

Cititorul care s-a străduit cu seriozitate să rezolve problemele are posibilitatea de a profita la maximum de pe urma indicației și a soluției. Dacă obține rezultatul prin propriile sale mijloace, el poate învăța ceva, comparîndu-și metoda cu cea dată în carte. Dacă, după un efort serios, el tinde să renunțe, indicația îi poate oferi ideea care-i lipsește. Dacă indicația nu-i este de folos, el se poate uita la soluție, încercînd să desprindă ideea cheie, să pună cartea de o parte, încercînd apoi să obțină singur soluția.

1 Cu excepția problemei 1 (larg cunoscută, dar prea amuzantă pentru a fi omisă), toate problemele sînt luate de la Concursurile de matematică de la Universitatea Stanford (cu cîteva modificări neesențiale). Unele probleme au fost publicate anterior în „The American Mathematical Monthly" și în „The California Mathematics Council Bulletin". Ultimul periodic conține și unele soluții publicate de autor; ele sînt rearanjate în mod corespunzător în cele ce urmează.

1. Un urs pornește din punctul P, merge o milă exact spre sud. Își schimbă apoi direcția și merge o milă exact spre est. După aceea, o ia din nou spre stînga și merge o milă exact spre nord, ajungînd apoi în punctui P, de unde plecase. Care este culoarea ursului?

2. Bob dorește un petic de pămînt, perfect plan, cu patru linii frontieră. Două linii frontieră sînt orientate exact pe direcția nord-sud, iar celelalte două exact pe direcția est-vest; fiecare linie frontieră are lungimea exactă de 100 m. Poate Bob să cumpere un astfel de petic de pămînt în S.U.A.?

3. Bob are zece buzunare și 44 de dolari de argint. El vrea să-și repartizeze dolarii prin buzunare, în așa fel încît fiecare buzunar să conțină alt număr de dolari. Este oare posibil?

4. Pentru a numerota paginile unui volum gros, un tipograf a utilizat 2989 de cifre. Cîte pagini are volumul?

5. Prin hîrtiile bunicului s-a găsit o chitanță:

72 curcani — 67,9 — $(dolari)

Prima și ultima cifră din acest număr, care reprezintă evident prețul total al păsărilor, sînt înlocuite aici prin linioare, deoarece s-au șters cu vremea și nu mai pot fi citite.

Care sînt cele două cifre lipsă și cît a costat un curcan?

6. Se dau un hexagon regulat și un punct în planul lui. Să se ducă o dreaptă care să treacă prin punctul dat și să taie hexagonul în două părți echivalente.

7. Se dă un pătrat. Să se afle locul geometric al punctelor din care pătratul este văzut sub un unghi (a) de 90°, (b) de 45°. (Fie P un punct exterior pătratului, dar situat în același plan. Unghiul cel mai mic cu vîrful în P și care conține pătratul este „unghiul sub care se vede pătratul" din P.) Determinați ambele locuri și dați descrierea lor completă.

8. Se numește „axă" a unui corp solid dreapta care unește două puncte ale suprafeței corpului și are proprietatea că acesta, rotit în jurul dreptei cu un unghi mai mare decît 0° și mai mic decît 360°, coincide cu el însuși.

Să se afle axele unui cub. Să se descrie clar poziția axelor să se afle unghiul de rotație asociat fiecăreia dintre ele. Presupunînd că muchia cubului este egală cu unitatea de lungime, să se calculeze media aritmetică a lungimilor axelor.

9. Într-un tetraedru (nu neapărat regulat) două muchii opuse au aceeași lungime a și sînt perpendiculare. În plus, ele sînt fiecare perpendiculare pe un segment de lungime b,

care unește mijloacele lor. Să se exprime volumul tetraedrului în funcție de a și de b și să se demonstreze rezultatul.

10. Vom numi vîrful unei piramide care este opus bazei *apex*. (a) Vom spune că piramida este „isoscelă", dacă apexul ei este egal depărtat de toate *vîrfurile* bazei. Adoptînd această definiție, să se demonstreze că baza unei piramide isoscele este *înscrisă* într-un cerc al cărui centru este piciorul înălțimii piramidei.

(b) Acum vom spune că piramida este „isoscelă", dacă apexul ei este egal depărtat de toate laturile bazei. Adoptînd această definiție (diferită de cea precedentă), să se demonstreze că baza unei piramide isoscele este *circumscrisă* unui cerc al cărui centru este piciorul înălțimii piramidei.

11. Să se afle necunoscutele x, y, u și v care satisfac sistemul de patru ecuații

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16 \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16 \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16 \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16 \end{aligned}$$

(Pare lung și laborios; să se caute un drum mai scurt.)

12. Bob, Peter și Paul călătoresc împreună. Peter și Paul rezistă să meargă mult pe jos; fiecare dintre ei merge cu viteza de p kilometri pe oră. Bob are un picior bolnav și conduce un automobil mic care poate transporta două persoane, nu însă trei; viteza mașinii este de c kilometri pe oră. Cei trei prieteni convin asupra următoarei scheme: pornesc împreună, Paul merge în mașină împreună cu Bob, în timp ce Peter umblă pe jos. După un timp, Bob se oprește, iar Paul coboară, continuîndu-și drumul pe jos. Bob se întoarce ca să-l ia pe Peter, după care Bob și Peter merg cu mașina pînă-l ajung din urmă pe Paul. În acest punct, se efectuează schimbul: Paul se urcă în mașină și Peter pornește pe jos, exact ca în momentul cînd au început, și întregul procedeu se repetă ori de cîte ori este necesar.

(a) Cît înaintează (cu cîți kilometri) pe oră toți trei?

(b) Ce parte din drum transportă mașina doar un singur om?

(c) Să se verifice cazurile particulare $p = 0$ și $p = c$.

13. Trei numere sînt în progresie aritmetică, iar alte trei în progresie geometrică. Adunînd termenii corespunzători ai celor două progresii, obținem respectiv

85, 76 și 84,

iar suma celor trei termeni ai progresiei aritmetice este 126. Să se afle termenii celor două progresii.

14. Să se determine m, astfel încît ecuația în x

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

să aibă patru rădăcini reale în progresie aritmetică.

15. Perimetrul unui triunghi dreptunghic este de 60 *cm*, iar lungimea înălțimii perpendiculare pe ipotenuză este de 12 *cm*. Să se afle laturile.

16. De pe vîrful unui munte se văd două puncte A și B, în cîmpie. Razele vizuale îndreptate spre aceste puncte cuprind un unghi γ. Înclinația primei raze vizuale față de planul orizontal este α, iar a celei de-a doua β. Se știe că cele două puncte A și B sînt la același nivel și că distanța dintre ele este c.

Să se exprime cota x a vîrfului în raport cu nivelul punctelor A și B, în funcție de unghiurile α, β, γ și de distanța e.

17. Observînd că valoarea sumei

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!}$$

este respectiv 1/2, 5/6, 23/24 pentru $n = 1, 2, 3$, să se ghicească legea generală (observînd, dacă este cazul, mai multe valori) și să se demonstreze conjectura.

18. Fie dat tabelul

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 + 5 &= 8 \\ 7 + 9 + 11 &= 27 \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 64 \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125 \end{aligned}$$

Să se ghicească legea generală sugerată de aceste exemple, să se exprime în notații matematice adecvate și să se demonstreze.

19. Un hexagon regulat are latura de lungime n (n este întreg). Prin paralele egal depărtate la laturi hexagonul este împărțit în T triunghiuri echilaterale, avînd fiecare latura de lungime 1. Fie V numărul de vîrfuri generate în această diviziune și L numărul liniilor frontieră de lungime 1. (O linie frontieră aparține la unul sau la două triunghiuri, un vîrf la două sau mai multe triunghiuri.) În cazul cel mai simplu $n = 1$, avem $T = 6$, $V = 7$, $L = 12$. Să se considere cazul general și să se exprime T, V și L în funcție de n. (Conjectura este bună, demonstrația este și mai bună.)

20. În cîte feluri putem schimba un dolar? (un „mod de schimb" este determinat, dacă știm cîte monede de fiecare fel — de cîte 1, 5, 10, 25 și 50 de cenți — sînt folosite.)

INDICAȚII

1. *Care este necunoscuta?* Culoarea unui urs; dar cum poate fi determinată culoarea unui urs din date matematice? *Ce este dat?* O situație geometrică, care pare însă contradictorie: Cum a putut ursul, după ce a mers trei mile în modul în care l-am descris să revină la punctul *de plecare?*

2. *Cunoaștem vreo problemă înrudită?*

3. Dacă Bob ar avea foarte mulți dolari, nu i-ar fi, evident, greu să umple fiecare buzunar cu un număr diferit. *S-ar putea reformula problema?* Care este numărul minim de dolari ce se pot repartiza în zece buzunare, astfel încît două buzunare diferite să nu conțină același număr?

4. *Iată o problemă înrudită cu a noastră*: Dacă volumul are exact 9 pagini numerotate, cîte cifre folosește tipograful? (Natural, 9.) Iată o altă *problemă înrudită cu a noastră*: Dacă volumul are exact 99 pagini numerotate, cîte cifre utilizează tipograful?

5. *S-ar putea reformula problema?* Ce pot fi cele două cifre lipsă, dacă prețul total, exprimat în cenți, este divizibil prin 72?

6. *Am putea imagina o problemă înrudită și mai accesibilă? Una mai generală? Una analogă?* (**Generalizare**, 2).

7. *Cunoaștem vreo problemă înrudită?* Locul geometric al punctelor din care un segment de dreaptă dat este vizibil sub un unghi dat constă din două arce de cerc, avînd extremitățile în capetele segmentului și simetrice în raport cu segmentul.

8. Presupun că cititorul este familiarizat cu forma cubului și a găsit anumite axe printr-o simplă examinare vizuală,— sînt oare acestea *toate* axele? *Puteți demonstra* că lista axelor, pe care ați întocmit-o, este completă? Există un principiu de clasificare limpede în această listă?

9. *Să cercetăm necunoscuta!* Necunoscuta este volumul unui tetraedru; da, știm, volumul oricărei piramide poate fi calculat dacă se dau baza și înălțimea (produsul lor, împărțit prin 3), dar în cazul de față nu sînt date nici baza, nici înălțimea. *Am putea să imaginăm o problemă înrudită și mai accesibilă?* (Puteți întrevedea un tetraedru mai accesibil, care să fie parte exactă a celui dat?)

10. *Cunoaștem vreo teoremă înrudită?* Cunoaștem vreo *teoremă* înrudită... mai simplă... *analogă?* Da: piciorul înălțimii este mijlocul bazei într-un triunghi isoscel. Iată o *teoremă înrudită cu a noastră și demonstrată anterior. Am putea cumva să-i folosim metoda?* Teorema referitoare la triunghiul isoscel se demonstrează pe baza unor triunghiuri dreptunghice egale, avînd înălțimea ca latură comună.

11. Se presupune că cititorul este întrucîtva familiarizat cu sistemele de ecuații liniare. Pentru a rezolva un astfel de sistem, trebuie să combinăm într-un anumit mod ecuațiile, — căutați relații între ecuații, care să vă poată indica o combinație deosebit de avantajoasă.

12. *Să separăm diversele părți ale condiției. Pot fi ele scrise în limbaj matematic?* Între punctul de pornire și cel unde se reîntîlnesc cei trei prieteni, avem trei faze diferite:

(1) Bob merge în mașină cu Paul
(2) Bob merge în mașină singur
(3) Bob merge în mașină cu Peter.

Să notăm cu t_1, t_2, t_3 duratele respective ale acestor faze. Cum pot ele descompune condiția în părți convenabile?

13. *Să separăm diversele părți ale condiției. Pot fi ele scrise în limbaj matematic?* Fie

$$a - r, \qquad a, \qquad a + r$$

termenii progresiei aritmetice și

$$bq^{-1} \qquad b \qquad bq$$

termenii progresiei geometrice.

14. *Care este condiția?* Cele patru rădăcini formează o progresie aritmetică. Ecuația este de formă particulară: nu conține decît puteri pare ale necunoscutei x. De aceea, dacă a este o rădăcină, — a va fi de asemenea o rădăcină.

15. *Să separăm diversele părți ale condiției. Pot fi ele scrise în limbaj matematic?* Putem distinge trei părți ale condiției referitoare la

(1) perimetru
(2) triunghiul dreptunghic
(3) înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

16. *Să separăm diversele părți ale condiției. Pot fi ele scrise în limbaj matematic?* Fie a și b lungimile razelor vizuale (necunoscute), iar α și β inclinațiile lor respective față de planul orizontal. Putem distinge trei părți ale condiției referitoare la

(1) inclinația lui a
(2) inclinația lui b
(3) triunghiul de laturi a, b, c,

17. *Recunoașteți* numitorii 2, 6, 24? *Cunoașteți vreo problemă înrudită? Una analogă?* (**Inducția și inducția matematică**).

18. Descoperirea prin inducție presupune observație. Cercetați membrii din dreapta, termenii inițiali ai membrilor din stînga și termenii finali. Care este legea generală?

19. *Să facem un desen.* Cercetarea lui ne-ar putea ajuta să descoperim inductiv legea sau ne-ar putea conduce la relațiile dintre T, V, L și n.

20. *Care este necunoscuta?* Ce trebuie să căutăm? Chiar scopul problemei poate necesita clarificări. *Am putea imagina o problemă înrudită și mai aceesibilă? Una mai generală? Una analogă?* Iată o problemă analogă *foarte* simplă: În cîte moduri puteți plăti un cent? (Într-unul singur.) Iată o problemă mai generală: În cîte moduri se poate plăti suma de n cenți, folosind cele cinci feluri de monede: de cîte 1, 5, 10, 25, și 50 cenți. Noi avem cazul particular $n = 100$.

În cazurile particulare cele mai simple, pentru n, putem tabela răspunsul fără o metodă prea pretențioasă, doar prin încercări, prin examinarea situației. Iată un tabel scurt (pe care cititorul să-l verifice):

n	4	5	9	10	14	15	19	20	24	25
E_n	1	2	2	4	4	6	6	9	9	13

Primul rînd conține sumele care trebuie plătite și notate în general cu n. Rîndul al doilea dă numărul corespunzător de „moduri de a plăti", notat în general cu E_n. (De ce am ales această notație este secretul meu, pe care nu sînt dispus să-l dezvălui în acest stadiu.)

Noi ne ocupăm în mod special de E_{100}, dar sînt prea puține speranțe să-l putem calcula pe E_{100} fără o metodă clară. În adevăr, problema de față îi cere cititorului ceva mai mult decît cele precedente: el trebuie *să creeze* o mică *teorie*.

Întrebarea noastră este generală (să se calculeze E_n pentru n arbitrar), dar este „izolată". *Am putea imagina o problemă înrudită și mai accesibilă? Una analogă?* Iată o problemă analogă *foarte* simplă: Să se afle A_n, numărul de moduri în care putem plăti suma de n cenți, folosind numai monede de cîte un cent ($A_n = 1$).

SOLUȚII

1. *V-ați gîndit că ursul era alb și că punctul P este Polul Nord? Puteți demonstra că este așa?* După cum ați înțeles mai mult sau mai puțin, problema este idealizată. Considerăm globul exact sferic și ursul drept un punct material mobil. Acest punct, mișcîndu-se exact spre sud sau exact spre nord, descrie un arc de *meridian*, și un arc de *paralelă*, cînd se mișcă exact spre est. Trebuie să distingem două cazuri.

(1) Dacă ursul revine la punctul P în lungul unui meridian *diferit* de cel în lungul căruia a plecat din P, P este cu necesitate Polul Nord. În adevăr, unicul punct de pe glob unde se mai întîlnesc două meridiane este Polul Sud, însă ursul ar fi putut părăsi acest pol numai mișcîndu-se spre nord.

(2) Ursul s-ar fi putut reîntoarce în P în lungul aceluiași meridian pe care a plecat din P, în cazul în care, mergînd o milă exact spre est, el descrie de exact n ori (unde n poate fi 1, 2, 3, ...) un cerc paralel cu ecuatorul. În acest caz, P nu este Polul Nord, ci un punct de pe un paralel foarte apropiat de Polul Sud (al cărui perimetru, exprimat în mile este cu puțin mai mic decît $2\pi + 1/n$).

2. Reprezentăm globul ca în soluția problemei 1. Peticul de pămînt pe care-l vrea Bob este mărginit de două meridiane și de două paralele. Închipuiți-vă două meridiane fixe și un paralel care se mișcă *de la* ecuator: arcul de paralel în mișcare, interceptat de cele două meridiane fixe, se micșorează continuu. Centrul terenului pe care-l vrea Bob trebuie să se afle pe ecuator: el *nu* poate să și-l procure în S.U.A.

3. Cel mai mic număr de dolari care poate fi pus într-un buzunar este, evident 0. Numărul următor, mai mare, este cel puțin 1, următorul cel puțin 2 ... iar numărul din ultimul buzunar (al zecilea) este cel puțin 9. De aceea, numărul de dolari necesar este de cel puțin

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45.$$

Bob nu poate proceda astfel, pentru că nu are decît 44 de dolari.

4. Un volum de 999 de pagini are nevoie de

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2889 \text{ cifre.}$$

Dacă volumul cel gros care ne interesează are x pagini, atunci

$$2889 + 4(x - 999) = 2989$$

$$x = 1024.$$

Această problemă ne arată că o evaluare preliminară a necunoscutei se poate dovedi utilă (sau chiar necesară) ca în cazul de față.

5. Dacă numărul — 679 — este divizibil prin 72, înseamnă că este divizibil prin 8 și prin 9. Dacă este divizibil prin 8, numărul 79 — trebuie să fie divizibil prin 8 (deoarece numărul 1 000 este divizibil prin 8) și deci 79 trebuie să fie 792: ultima cifră ștearsă este 2. Dacă numărul — 6792 este divizibil prin 9, suma cifrelor numărului trebuie să fie divizibilă prin 9 (conform regulii) și deci prima cifră lipsă va fi 3. Prețul unui curcan era (pe vremea bunicului) 367,92\$: 72 = = 5,11\$.

6. Se dă poziția *unui punct* și a *unei figuri cu centrul de simetrie* (situate în același plan). Să se afle o dreaptă care trece prin punctul dat și împarte aria figurii date în două părți egale. Natural, linia cerută trece prin centrul de simetrie. Vezi *Paradoxul inventatorului.*

7. În orice poziție, cele două laturi ale unghiului trebuie să treacă prin două vîrfuri ale pătratului. Cît timp ele trec prin aceeași pereche de vîrfuri, vîrful unghiului se mișcă pe același arc de cerc (conform teoremei pe care se bazează indicația). De aceea, fiecare dintre cele două locuri geometrice căutate constă din mai multe arce de cerc: 4 semicercuri în cazul (a) și 8 sferturi de cerc în cazul (b); vezi fig. 31.

8. Axa înțeapă suprafața cubului într-un punct care este fie un vîrf, fie situat pe o muchie, fie interior unei fețe. Dacă axa trece printr-un punct de pe o muchie (dar nu printr-o extremitate a acesteia), punctul acesta trebuie să fie mijlocul, deoarece, altfel, muchia nu ar putea să coincidă cu ea însăși după o rotație. Tot astfel, o axă care înțeapă interiorul unei fețe trebuie să treacă prin centrul ei. Bineînțeles, fiecare axă trebuie să treacă prin centrul cubului. Astfel, avem trei feluri de axe:

(1) 4 axe, trecînd fiecare prin cîte 2 vîrfuri opuse; unghiurile 120°, 240°.

(2) 6 axe trecînd fiecare prin mijloacele a cîte două muchii opuse; unghiul 180°

(3) 3 axe trecînd prin centrele a cîte 2 fețe opuse; unghiurile 90°, 180°, 270°.

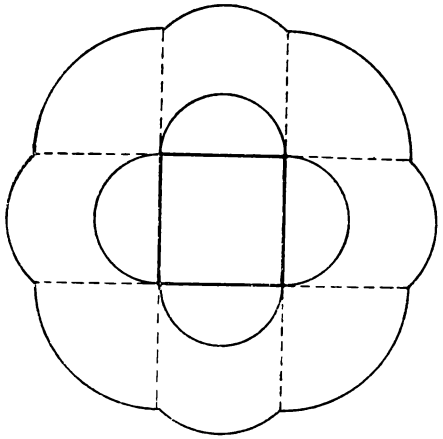

Fig. 31

Pentru lungimea unei axe de primul fel, vezi pct. **12**; celelalte sînt mai ușor de calculat. Media cerută este

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1{,}416.$$

(Această problemă poate fi folositoare pentru a-l pregăti pe cititor în vederea studiului cristalografiei. Pentru cititorul destul de avansat în calculul integral, putem observa că media calculată este o foarte bună aproximație pentru „lățimea medie" a cubului, care este, în fapt, 3/2 = 1,5.)

9. Planul care trece printr-o muchie de lungime a și perpendiculara de lungime b împart tetraedrul în două tetraedre egale *mai accesibile*, avînd fiecare baza $ab/2$ și înălțimea $a/2$. De aceea, volumul cerut este

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}.$$

10. Baza piramidei este un poligon cu n laturi. În cazul (a) cele n muchii laterale ale piramidei sînt egale; în cazul (b), înălțimile (coborîte din apex) în cele n fețe laterale sînt egale. Dacă desenăm înălțimea piramidei și-i unim piciorul cu cele n vîrfuri ale bazei în cazul (a) și cu picioarele înălțimilor celor n fețe laterale în cazul (b), obținem, în ambele cazuri, *n triunghiuri dreptunghice în care înălțimea* (piramidei) *este latură comună*: susțin că aceste n triunghiuri dreptunghice sînt egale. În adevăr, ipotenuza [o muchie în cazul (a) și o înălțime a unei fețe în cazul (b)] are aceeași lungime în fiecare dintre triunghiuri, conform definiției de la baza problemei noastre; am menționat că o altă latură (înălțimea piramidei) și un unghi (cel drept) sînt comune tuturor. În cele n triunghiuri egale, latura a treia trebuie să fie și ea egală; aceste laturi pornesc din același punct (piciorul înălțimii) și se află în același plan (al bazei): ele formează n raze ale unui cerc care este circumscris bazei piramidei sau, respectiv, înscris, în cazurile (a) și (b). [În cazul (b) rămîne să arătăm însă că cele n raze menționate sînt perpendiculare pe laturile respective ale bazei; aceasta rezultă dintr-o binecunoscută teoremă a geometriei în spațiu, referitoare la proiecții].

Este cu totul remarcabil că o figură plană, triunghiul isoscel, poate avea *doi analogi diferiți* în geometria în spațiu.

11. Să observăm că relația dintre prima ecuație și ultima este aceeași cu cea dintre a doua și a treia: coeficienții din membrul întîi sînt aceeași, însă în ordine inversă, pe cînd în membrul al doilea valorile sînt opuse. Adunăm prima ecuație cu ultima și a doua cu a treia

$$6(x + u) + 10\,(y + v) = 0,$$
$$10(x + u) + 10\,(y + v) = 0.$$

Putem considera aceasta drept un sitem de două ecuații liniare cu două necunoscute anume $x + u$ și $y + v$, obținînd ușor

$$x + u = 0 \qquad y + v = 0$$

Substituind $-x$ pentru u și $-y$ pentru v în primele două ecuații ale sistemului inițial, obținem

$$-4x + 4y = 16,$$
$$6x - 2y = -16.$$

Este un sistem simplu, care dă

$$x = 2, \qquad y = 2 \qquad u = 2, \qquad v = -2.$$

12. Între punctul de pornire și cel de întîlnire, fiecare dintre cei trei prieteni a parcurs aceeași distanță. (Să ne reamintim că spațiul = viteza × timpul.) Distingem două părți ale condiției:

Bob a parcurs același spațiu ca și Paul:

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3,$$

Paul a parcurs tot același spațiu ca și Peter:

$$ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3.$$

Ecuația a doua este:

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3.$$

Natural, vom presupune că viteza automobilului este mai mare decît a pietonilor, $c > p$. Rezultă

$$t_1 = t_3;$$

așadar, Peter parcurge același spațiu ca și Paul. Prima ecuație ne dă

$$\frac{t_3}{t_2} = \frac{c + p}{c - p}$$

care este, bineînțeles, și valoarea raportului t_1/t_2. Prin urmare obținem răspunsurile:

$$\text{(a)}\ \frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c + 3p)}{3c + p}$$

$$\text{(b)}\ \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c - p}{3c + p}$$

(c) În adevăr, $0 < p < c$. Avem două cazuri limită:

Dacă $p = 0$, (a) dă $c/3$ și (b) dă $1/3$.

Dacă $p = c$, (a) dă c și (b) dă 0.

Aceste rezultate se văd ușor și fără calcul.

13. Condiția se descompune ușor în 4 părți, exprimate prin cele 4 ecuații

$$\begin{aligned} a - r + bq^{-1} &= 85 \\ a + b &= 76 \\ a + r + bq &= 84 \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

Ultima ecuație dă $a = 42$, a doua $b = 34$. Adunînd cele două ecuații rămase (pentru a elimina pe r), obținem

$$2\ a + b\ (q^{-1} + q) = 169.$$

Deoarece a și b sînt acum cunoscute, avem aici o ecuație de gradul doi în q. Ea dă

$$q = 2, \quad r = -26 \quad \text{sau } q = 1/2, \quad r = 25.$$

Progresiile sînt

68, 42, 16, 17, 42, 67

sau

17, 34, 68 68, 34, 17.

14. Dacă a și $-a$ sînt rădăcinile cele mai mici în valoare absolută, ele vor fi vecine în progresie care, va fi deci de forma

$$-3a,\ -a,\ a,\ 3a.$$

Prin urmare, membrul întîi al ecuației noastre trebuie să fie de forma

$$(x^2 - a^2)\ (x^2 - 9a^2).$$

Efectuînd înmulțirile și comparînd coeficienții puterilor egale, obținem sistemul

$$\begin{aligned} 10a^2 &= 3m + 2, \\ 9a^4 &= m^2. \end{aligned}$$

Eliminînd pe a, obținem

$$19m^2 + 108m - 36 = 0,$$

de unde $m = 6$ sau $-6/19$.

15. Fie a, b, c laturile, aceasta din urmă fiind ipotenuza. Cele trei părți ale condiției se exprimă prin ecuațiile

$$\begin{aligned} a + b + c &= 60; \\ a^2 + b^2 &= c^2; \\ ab &= 12c. \end{aligned}$$

Observînd că

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

obținem

$$(60 - 6)^2 = c^2 + 24c,$$

de unde $c = 25$ și $a = 15$, $b = 20$ sau $a = 20$, $b = 15$ (este indiferent pentru triunghi).

Cele trei părți ale condiției se exprimă astfel:

$$\sin\alpha = \frac{x}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Eliminînd pe a și pe b, obținem:

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma}.$$

17. Conjecturăm că

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Urmînd schema din *Inducția și inducția matematică*, punem întrebarea: Mai rămîne adevărată formula conjecturată, dacă trecem de la n la $n + 1$? Alături de formula de mai sus ar trebui să avem

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

Verificăm aceasta scăzînd din ultima formulă, formula precedentă; obținem expresia

$$\frac{n+1}{(n+2)!} = -\frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

care se reduce la

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

și această din urmă ecuație este evident adevărată pentru $n=1$, 2, 3, ...; deci, urmînd schema citată mai sus, putem demonstra conjectura noastră.

18. În rîndul al n-lea, în membrul drept pare că vom avea n^3, iar în membrul stîng suma a n termeni. Ultimul termen al acestei sume va fi al m-lea număr impar, sau $2m-1$, unde

$$m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

vezi *Inducția și inducția matematică*, 4. Prin urmare, ultimul termen al sumei din membrul întîi trebuie să fie

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

Putem deduce de aici termenii inițiali ai sumei considerate, pe *două* căi: mergînd înapoi $n-1$ pași de la termenul final, găsim

$$(n^2 + n - 1) - 2(n-1) = n^2 - n + 1,$$

de unde înaintînd cu un pas de la ultimul termen al penultimului rînd, găsim

$$[(n-1)^2 + (n-1) - 1] + 2,$$

care, după simplificări obișnuite ne dă același lucru: foarte bine! De aceea, afirmăm că

$$(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \ldots + (n^2 + n - 1) = n^3$$

unde membrul întîi cuprinde suma a n termeni consecutivi dintr-o progresie aritmetică cu rația 2. Dacă cititorul cunoaște regula care dă suma unei astfel de progresii (media aritmetică a termenului inițial și a celui final, înmulțită cu numărul termenilor), el poate să verifice că

$$\frac{(n^2-n+1)+(n^2+n-1)}{2}\, n = n^3,$$

și afirmația este astfel demonstrată.

(Regula citată poate fi ușor demonstrată printr-un desen puțin diferit de fig. 17).

19. Lungimea perimetrului unui hexagon regulat avînd latura n este $6n$. De aceea, acest perimetru este format din $6n$ linii frontieră avînd lungimea 1 și conține $6n$ vîrfuri. Astfel, dacă trecem de la $n-1$ la n, V crește cu $6n$ unități și deci

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n^2 + 3n + 1;$$

vezi *Inducția și inducția matematică*, 4. Trei diagonale duse prin centrul hexagonului, îl împart în 6 triunghiuri echilaterale (mari). Cercetînd unul dintre ele, avem

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1) = 6n^2$$

(regula pentru suma unei progresii aritmetice, menționată în soluția problemei 18). Cele T triunghiuri au $3T$ laturi. În acest total de $3T$, fiecare linie de diviziune interioară de lungime 1 este numărată de 2 ori, în timp ce cele $6n$ linii de pe perimetrul hexagonului sînt numărate doar o singură dată. De aceea,

$$2L = 3T + 6n, \qquad L = 9n^2 + 3n.$$

Pentru cititorul mai avansat, aceasta rezultă din teorema lui Euler asupra poliedrelor: $T + V = L + 1$. Să se verifice această relație!

20. Avem aici un șir bine ordonat de probleme analoge: Să se calculeze A_n, B_n, C_n, D_n, și E_n. Fiecare dintre aceste cantități reprezintă numărul de moduri în care se poate plăti o sumă de n cenți; diferența constă în monedele folosite:

A_n numai monede de cîte 1 cent;
B_n 1 și 5 cenți;
C_n 1, 5 și 10 cenți;
D_n 1, 5, 10 și 25 de cenți;
E_n 1, 5, 10, 25 și 50 de cenți.

Simbolurile E_n (motivul este acum clar) și A_n au fost folosite anterior.

Toate modurile de a plăti suma de n cenți cu cele 5 feluri de monede sînt enumerate în E_n. Putem distinge însă două posibilități:

Prima. Nu se folosesc monede de 50 de cenți. Prin definiție numărul acestor căi este D_n.

A doua. Se folosește o monedă de 50 de cenți (eventual mai multe). După ce prima monedă de 50 de cenți a fost pusă pe masă, mai rămîn de plătit $n - 50$ cenți, ceea ce se poate face exact în E_{n-50} căi.

Avem așadar

$$E_n = D_n + E_{n-50}.$$

Tot astfel

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$
$$C_n = B_n + C_{n-10},$$
$$B_n = A_n + B_{n-1}.$$

Cu puțină atenție constatăm că formulele rămîn valabile, dacă punem

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

(care au evident sens) și dacă considerăm fiecare dintre cantitățile A_n, B_n, ..., E_n ca fiind egală cu 0 cînd indicele ei este negativ (de exemplu, după cum vedem imediat, $E_{25} = D_{25}$, și aceasta concordă cu prima noastră formulă, deoarece $E_{25-50} = E_{-25} = 0$).

Formulele noastre ne permit să calculăm *recursiv*, prin *recurență*, cantitățile considerate, adică mergînd înapoi spre valori mai mici ale lui n sau spre litere anterioare ale alfabetului. De exemplu, putem calcula pe C_{30} prin simpla adunare, dacă C_{20} și D_{30} sînt cunoscute. În tabelul de mai jos, prima linie, care începe cu A_n și prima coloană, care începe cu 0, conțin numai numere egale cu 1 (De ce?). Plecînd de la aceste numere inițiale, le calculăm pe celelalte prin recurență, prin simplă adunare: fiecare număr din tabel este egal fie cu numărul de deasupra lui, fie cu suma a două numere: cel de deasupra lui și un altul situat la o distanță corespunzătoare, în stînga. De exemplu:

$$C_{30} = B_{30} + C_{20} = 7 + 9 = 16.$$

Calculul este efectuat pînă la $E_{50} = 50$; *Putem plăti 50 de cenți exact în 50 de moduri diferite.* Continuînd, cititorul se poate convinge că $E_{100} = 292$: *1 dolar poate fi schimbat în mărunțiș în 292 de moduri diferite.*

n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
A_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_n	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
D_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
E_n	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

ANEXĂ

A ÎNVĂȚA, A PREDA, A ÎNVĂȚA SĂ PREDĂM[1]

„Ceea ce ați fost obligați să descoperiți singuri vă lasă în minte o urmă pe care o puteți folosi din nou, atunci cînd apare nevoia" (G.C. Dichtenberg, *Aphorisman.*)

„Astfel, orice cunoaștere umană începe cu intuiții, trece de la ele la concepții și se încheie cu idei" (I. Kant, *Critica rațiunii pure*, traducere în l. engleză de J.M.D. Meiklejohn, 1878, p. 429.)

„Am (plănuit) să scriu în așa fel încît cel ce învață să poată vedea totdeauna motivul lăuntric al lucrurilor pe care le învață, chiar astfel încît izvorul invențiunii să poată ieși la iveală, și, de aceea, în așa fel încît cel ce învață să poată înțelege orice lucru, ca și cum l-ar fi inventat singur" (G.W. von Leibniz, *Matematische Schriften*, ed. Gerhardt, vol. VII, p. 9.)

1. Predarea nu este o știință. Vă voi expune unele dintre părerile mele asupra procesului de învățare, asupra artei de a preda și asupra pregătirii profesionale a profesorului.

Părerile mele sînt rezultatul unei îndelungate experiențe. Or, astfel de opinii personale ar putea fi nesemnificative și nu aș îndrăzni să vă răpesc timp povestindu-vi-le, dacă predarea ar putea fi complet reglementată pe baza unor fapte și teorii științifice. Nu este însă cazul. După părerea mea, a preda nu este tocmai o ramură a psihologiei aplicate, — în orice caz, pentru moment nu este încă o ramură a psihologiei aplicate.

Predarea este corelată cu învățarea. Studiul experimental și teoretic al învățării este o ramură a psihologiei, cultivată extensiv și intensiv. Există însă o deosebire. Aici ne interesează, în principal, situațiile de învățare complexe, cum sînt

[1] Articolul de față a apărut în „The American Mathematical Monthly", **70**, 1963, pp. 605—619. — *N.T.*

învățarea algebrei sau învățarea predării, precum și efectele lor educative de lungă durată. Psihologii însă consacră cea mai mare parte a atenției lor unor situații simplificate și de scurtă durată și lucrează cel mai bine cu acestea. Astfel, psihologia învățării ne poate da indicații interesante, dar nu poate pretinde să-și spună ultimul cuvînt asupra problemelor predării (cf. 1).

2. Scopul predării. Nu putem aprecia realizarea profesorului, dacă nu-i cunoaștem scopul. Nu putem discuta cu înțeles predarea, dacă nu sîntem de acord, într-o anumită măsură cu scopul predării.

Să particularizăm. Mă interesează aici matematica din învățămîntul mediu și am o idee de modă veche, asupra scopului ei: ea trebuie, în primul rînd și cu precădere, să-i învețe pe tineri SĂ GÎNDEASCĂ.

Aceasta este convingerea mea fermă; puteți să nu fiți de acord cu ea în întregime, dar presupun că o admiteți pînă la un anumit punct. Dacă nu considerați că „a-l învăța pe elev să gîndească" este scopul principal, puteți considera că este un scop secundar, și atunci avem o bază comună suficientă pentru discuția care urmează.

„A-l învăța pe elev să gîndească" înseamnă că profesorul de matematică nu trebuie atîta să comunice informații, cît să caute să dezvolte priceperile elevului de a folosi informațiile dobîndite: el trebuie să dezvolte cunoașterea cauzelor, atitudinile utile, deprinderile recomandabile ale gîndirii. Acest scop ar avea nevoie de o explicație mai completă (ansamblul lucrărilor mele relative la problema predării ar putea constitui o astfel de explicație mai amplă), dar aici va fi suficient să subliniem numai două puncte.

Mai întîi, gîndirea cu care avem de-a face aici nu este o simplă reverie, ci o „gîndire cu un scop", sau o „gîndire voluntară" (William James), sau o „gîndire productivă" (Max Wertheimer). O astfel de „gîndire" poate fi identificată aici, cel puțin în primă aproximație, cu „rezolvarea de probleme". Cel puțin, după părerea mea, unul dintre scopurile principale ale cursului de matematică din școala medie constă în a dezvolta îndemînarea elevului de a rezolva problema.

În al doilea rînd, gîndirea matematică nu este pur „formală"; ea nu are de-a face numai cu axiome, cu definiții și cu demonstrații riguroase, ci și cu multe alte lucruri: generali-

zarea pe baza unor cazuri observate, argumentări inductive, argumentări prin analogie, recunoașterea unui concept matematic într-o situație concretă sau desprinderea lui dintr-o astfel de situație. Profesorul de matematică are posibilități foarte bune de a-și familiariza elevii cu aceste importante procese de gîndire „neformale", și cred că el ar trebui să folosească aceste posibilități mai bine și chiar mult mai bine decît astăzi. Ca să ne exprimăm incomplet, dar concis: să-l învățăm pe elev să demonstreze prin toate mijloacele, dar să-l învățăm totodată să ghicească.

3. Predarea este o artă. Predarea nu este o știință, ci o artă. Această părere a fost exprimată de atît de mulți oameni și de atîtea ori, încît sînt oarecum jenat că trebuie s-o repet. Dacă însă părăsim o generalitate întrucîtva banală și coborîm la cazuri particulare potrivite, putem desprinde cîteva artificii ale meșteșugului nostru, într-o lumină instructivă.

Evident, predarea are multe trăsături comune cu arta actorului. De exemplu, aveți de expus în fața clasei o demonstrație pe care o cunoașteți la perfecție și pe care ați expus-o de mai multe ori în anii precedenți, în aceeași clasă. Efectiv, nu puteți fi entuziasmați de această demonstrație, dar, vă rog, nu lăsați clasa să-și dea seama de aceasta: dacă se va vedea că sînteți plictisiți, întreaga clasă va fi plictisită. Susțineți că sînteți entuziasmați de demonstrație atunci cînd începeți s-o faceți, susțineți că aveți idei strălucite în timp ce o dezvoltați, susțineți că sînteți surprins și fericit atunci cînd ați dus-o la bun sfîrșit trebuie să jucați un pic de teatru pentru a-i atrage pe elevi care, din cînd în cînd, ar putea învăța mai mult din atitudinea pe care o adoptați decît din materia pe care le-o predați.

Trebuie să mărturisesc că îmi face plăcere să joc teatru, mai ales acum, cînd sînt bătrîn și dau foarte rar peste ceva nou în matematică: găsesc o anumită satisfacție în a reactualiza modul cum am descoperit în trecut cutare sau cutare detaliu de mai mică importanță.

Într-un mod mai puțin evident, predarea are cîte ceva în comun și cu muzica. Știți, firește, că profesorul nu trebuie să spună ce are de spus o dată sau de două ori, ci de trei, de patru sau de mai multe ori. Or, repetarea aceleiași fraze de mai multe ori, fără pauză și fără modificări, poate fi ceva teribil de plictisitor și care compromite scopul. În adevăr, puteți învăța de la compozitori, cum să faceți față mai bine

acestei situații. Una dintre cele mai importante forme ale artei muzicale este „tema cu variațiuni". Transpunînd această formă din muzică în predare, începeți prin a vă exprima fraza în forma ei cea mai simplă; o repetați apoi cu o mică modificare; apoi o repetați încă o dată cu ceva mai multă nuanțare și așa mai departe; puteți închide cercul, revenind la formularea simplă de la început. Altă formă muzicală este „rondo"-ul. Transferînd rondo-ul din muzică în predare, repetați aceeași frază esențială de mai multe ori, cu modificări mici sau fără modificare, dar inserați între două repetări un anumit material ilustrativ adecvat. Sper că, data viitoare, cînd veți asculta o temă cu variațiuni a lui Beethoven sau un rondo al lui Mozart vă veți gîndi puțin la felul cum le puteți folosi în predare.

Din cînd în cînd predarea poate să semene cu poezia, și din cînd în cînd ea se apropie de vulgaritate. Îmi permiteți să vă povestesc o mică întîmplare despre marele Einstein? Îl ascultam odată pe Einstein, pe cînd vorbea unui grup de fizicieni, la o serată. „De ce au toți electronii aceeași sarcină?" întrebă el. „De ce au granulele din balega de capră aceeași mărime?" De ce spunea Einstein aceste lucruri? Oare numai pentru a-i face pe cîțiva snobi să se încrunte? Cred că așa ceva nu i-ar fi displăcut. Probabil însă că el urmărea ceva mai profund. Nu cred că observația de mai sus a lui Einstein era doar întîmplătoare. Oricum ar fi, am învățat ceva din ea: abstracțiunile sînt importante; uzați de toate mijloacele pentru a le face mai accesibile. Nimic nu este prea bun sau prea rău, prea poetic sau prea trivial pentru a vă clarifica abstracțiunile. După cum spune Montaigne: Adevărul este un lucru atît de mare încît nu trebuie să disprețuim nici unul dintre mijloacele care ne pot conduce la el. De aceea, dacă sufletul vă îndeamnă să fiți un pic poetic sau un pic vulgar în clasă, nu vă lăsați împiedicați de o jenă nejustificată.

4. Trei principii ale învățării. Predarea este un meșteșug cu nenumărate mici artificii. Fiecare profesor bun are metodele lui favorite și fiecare profesor bun se deosebește de orice alt profesor bun.

Orice metodă de predare bună trebuie să fie legată întrucîtva de natura procesului de învățare. Nu știm prea mult despre procesul de învățare, dar chiar o privire aproximativă asupra unora dintre laturile sale cele mai evidente aruncă o lumină bine venită asupra artificiilor meșteșugului

nostru. Dați-mi voie să vă prezint această schiță aproximativă sub forma a trei „principii" ale învățării. Enunțarea și combinarea lor sînt un rezultat al alegerii mele, însă „principiile" ca atare nu sînt cîtuși de puțin noi; ele au fost enunțate și reenunțate în diferite forme, ele derivă din experiența secolelor, sînt verificate de judecata unor oameni mari și sugerate de studiul psihologic al învățării.

Aceste „principii ale învățării" pot fi luate și ca „principii ale predării", și aceasta este motivul principal pentru care le considerăm aici, — dar despre aceasta vom vorbi mai tîrziu.

1. *Învățarea activă.* Mulți oameni au spus, în multe feluri, că învățarea trebuie să fie activă, nu numai pasivă sau receptivă; numai citind cărți sau ascultînd lecții sau vizionînd filme, fără a adăuga vreo acțiune a propriei minți, veți izbuti cu greu să învățați ceva, și, cu siguranță, nu veți putea învăța mult.

Există și o altă părere exprimată frecvent (și strîns legată de aceasta): *Cea mai bună metodă pentru a învăța ceva este să descoperiți acest ceva prin propriile dumneavoastră mijloace.* Lichtenberg (un fizician german din secolul al XVIII-lea, cunoscut mai mult ca autor de aforisme) adaugă aici un element interesant: *Ceea ce ați fost obligați să descoperiți singuri vă lasă în minte o urmă pe care o puteți folosi din nou, atunci cînd apare nevoia.* Următorul precept este mai puțin pregnant dar poate avea o aplicabilitate mai largă: *Pentru a învăța eficient, elevul trebuie să descopere prin propriile sale mijloace o parte cît mai mare în circumstanțele date din materialul pe care-l are de învățat.*

Acesta este principiul *învățării active* (*Arbeitsprinzip*). Este un principiu foarte vechi: el stă la baza ideii „metodei socratice".

2. *Motivarea optimă.* Am arătat că învățarea trebuie să fie activă. Dar cel ce învață nu va acționa, dacă nu are motiv să acționeze. El trebuie să fie determinat să acționeze de un anumit stimulent, de speranța unei anumite recompense, bunăoară. Interesul pe care-l prezintă materialul de învățat trebuie să fie cel mai bun stimulent al învățării, iar plăcerea unei activități intelectuale intense trebuie să fie cea mai bună recompensă a unei astfel de activități. Dar, dacă nu putem să obținem ceea ce este mai bun, trebuie să căutăm să ajungem la ceea ce este mai puțin bun sau și mai puțin

bun, și nici cele mai puțin importante motivări intrinsece ale învățăturii nu trebuie date uitării.

Pentru ca învățarea să fie eficientă, cel ce învață trebuie să fie interesat de materialul pe care-l are de învățat și să găsească plăcere în activitatea de învățare. Dar pe lîngă aceste motive ale învățării, care sînt cele mai bune, mai există și alte motive, dintre care unele sînt chiar de dorit. (Pedeapsa pentru a nu fi învățat poate fi motivul cel mai puțin de dorit).

Vom numi această afirmație *principiul celei mai bune motivări* sau *principiul motivării optime.*

3. *Faze consecutive.* Să începem cu o frază des citată a lui Kant: *Astfel, orice cunoaștere umană începe cu intuiții, trece de la ele la concepții și se încheie cu idei.* Traducerea engleză utilizează termenii „cunoaștere, intuiție, ideie". Nu sînt în stare (cine este?) să vă spun în ce sens precis intenționa Kant să folosească acești termeni. Vă cer însă permisiunea de a vă arăta cum citesc eu această frază a lui Kant:

Învățarea începe cu acțiunea și cu percepția, trece de la ele la cuvinte și la noțiuni și ar trebui să se încheie cu deprinderi intelectuale utile.

Pentru început, vă rog să luați acești termeni într-un înțeles pe care-l puteți ilustra concret pe baza propriei dumneavoastră experiențe. (Unul dintre efectele dorite constă în a vă face să vă gîndiți la experiența dumneavoastră personală.) „Învățarea" trebuie să vă sugereze o clasă în care vă aflați ca elev sau ca profesor. „Acțiunea și percepția" trebuie să vă sugereze mînuirea și considerarea unor lucruri concrete cum sînt pietricele, sau mere, sau nuiele Cuisenaire, sau rigla și compasul, sau instrumentele dintr-un laborator etc.

O astfel de interpretare concretă a termenilor ne poate veni într-un mod mai ușor și mai natural, dacă ne gîndim la un material elementar simplu. Dar, după un timp, putem distinge faze similare în munca pentru stăpînirea unui material mai complex, mai înalt. Să deosebim trei faze: *explorarea*, *formalizarea* și *asimilarea.*

Prima fază, de *explorare*, este mai legată de acțiune și de percepție și funcționează la un nivel mai intuitiv, mai euristic.

A doua fază, de *formalizare*, se ridică la un nivel mai conceptual, introducînd terminologie, definiții, demonstrații.

Faza de *asimilare* vine la sfîrșit: ea trebuie să fie o încercare de a surprinde „rațiunea lăuntrică" a lucrurilor, materialul învățat trebuie să fie digerat mintal, absorbit în siste-

mul cunoștințelor, în întreaga perspectivă intelectuală a celui ce învață; această fază croiește drum, pe de o parte, spre aplicații, iar pe de altă parte, spre generalizări mai înalte.

Să rezumăm: *Pentru o învățare eficientă, o fază de explorare trebuie să preceadă faza transpunerii în cuvinte și de formare a noțiunilor și, eventual, materialul învățat trebuie să fie asimilat și să contribuie la formația intelectuală integrală a celui ce învață.*

Acesta este *principiul fazelor consecutive.*

5. Trei principii ale predării. Profesorul trebuie să cunoască metodele de învățare. El trebuie să evite pe cele ineficiente și să extragă avantaje din cele eficiente. Astfel, putem trage foloase bune din cele trei principii expuse mai sus, principiul învățării active, principiul celei mai bune motivări și principiul fazelor consecutive: aceste principii ale învățării sînt și principii ale predării. Există însă o condiție. Pentru a valorifica personal un astfel de principiu, profesorul nu trebuie să-l cunoască numai din auzite, ci trebuie să-l înțeleagă în modul cel mai intim pe baza propriei sale experiențe bine analizate.

1. *Predarea activă.* Ceea ce profesorul spune în clasă nu este lipsit de importanță, dar ceea ce elevul gîndește este de mii de ori mai important. Ideile trebuie să ia naștere în mintea elevului, iar profesorul trebuie să acționeze numai ca o moașă.

Este un percept clasic al lui Socrate, și forma de predare cea mai adecvată este dialogul socratic. Este un avantaj net al profesorului din școala medie față de cel din învățămîntul superior: el poate folosi forma dialogului pe o scară mult mai largă. Din nefericire, chiar în școala medie timpul este limitat și există un material obligator care trebuie parcurs, și de aceea nu totul poate fi realizat în forma dialogului. Principiul însă este: lăsați elevii *să descopere prin propriile lor mijloace cît mai mult posibil în împrejurările date.*

Sînt convins că se pot face mult mai multe decît se fac de obicei. Îngăduiți-mi să recomand aici un mic artificiu practic: lăsați-i pe elevi *să contribuie activ la formularea* problemei pe care urmează s-o rezolve. Dacă elevii au participat la punerea problemei, ei vor lucra pe urmă mai activ la rezolvarea ei.

În adevăr, în munca omului de știință, formularea problemei poate fi partea cea mai bună a descoperirii, adesea soluția are nevoie de mai puțină pătrundere și originalitate decît formularea. Așadar, lăsîndu-i pe elevi să ia parte la formulare, nu numai că le dați un motiv să muncească mai din plin, dar le inoculați și o deprindere recomandabilă de gîndire.

2. *Motivarea optimă.* Profesorul trebuie să se considere ca un negustor: el vrea să le vîndă tinerilor un pic de matematică. Or, dacă negustorul are dificultăți cu vînzarea și dacă viitorii săi clienți refuză să cumpere, vina nu este numai a lor. Tineți minte că clientul are totdeauna dreptate în principiu, iar cîteodată are dreptate și în practică. Tînărul care refuză să învețe matematică poate să aibă dreptate: este posibil ca el să nu fie nici leneș, nici prost, ci doar să-l intereseze mai mult altceva, — există atît de multe lucruri interesante în lumea din jurul nostru. Este datoria dumneavoastră de profesor, de vînzător de cunoștințe, să-l convingeți pe elev că matematica *este* interesantă, că problema pe care o discutați acum este interesantă, că această problemă la care lucrează merită efortul.

De aceea, profesorul trebuie să dea atenție alegerii, formulării și prezentării potrivite a problemei pe care o propune. Pe cît posibil, problema trebuie să fie legată de experiența de zi cu zi a elevilor și, dacă este cu putință, ea trebuie introdusă printr-o mică glumă sau printr-un mic paradox. Problema mai poate avea ca punct de plecare anumite cunoștințe cu care elevul este foarte bine familiarizat; dacă se poate, ea trebuie să prezinte un anumit interes general sau, eventual, un folos practic. Dacă vrem să-l stimulăm pe elev în vederea unui efort mare, trebuie să-i dăm un motiv de a bănui că tema pe care i-o dăm merită efortul.

Cea mai bună motivare este interesul elevului pentru tema sa. Dar mai există și alte motivări, care nu trebuie neglijate. Dați-mi voie să vă recomand aici un mic artificiu practic. Înainte ca elevii să înceapă lucrul la o problemă, lăsați-i *să ghicească rezultatul,* sau o parte a rezultatului. Exprimîndu-și o părere, elevul se angajează; prestigiul și stima sa față de el însuși depind întrucîtva de rezultat, el este nerăbdător să vadă dacă ceea ce a ghicit se va adeveri sau nu, și astfel el va fi interesat activ de tema sa și de munca în clasă, nu va adormi și nu se va purta nedisciplinat la lecție.

În adevăr, în munca omului de știință, ghicirea precede aproape totdeauna demonstrația. Așadar, lăsîndu-i pe elevi să ghicească rezultatul, nu numai că îi determinați să muncească cu mai multă rîvnă, ci le imprimați totodată o atitudine intelectuală recomandabilă.

3. *Faze consecutive.* Dezavantajul problemelor uzuale din manualele de școală medie constă în faptul că ele conțin aproape exclusiv exemple de rutină. Un exemplu de rutină este un exemplu cu un cîmp limitat; el ilustrează și dă posibilitatea exersării în aplicarea unei singure reguli izolate. Astfel de exemple de rutină pot fi utile și sînt chiar necesare, nu pot s-o neg, dar ele omit două faze importante ale învățării: faza de explorare și cea de asimilare. Ambele faze caută să lege problema actuală de lumea înconjurătoare și de alte cunoștințe, prima înaintea soluției formale, iar a doua după soluția formală. Or, o problemă de rutină este evident legată de regula pe care o ilustrează și prea puțin legată de altceva și deci, nu avem prea mult folos căutînd în ea alte legături. În opoziție cu aceste probleme de rutină, școala medie trebuie să propună, cel puțin din cînd în cînd, probleme mai stimulatoare, probleme cu un fond bogat, care merită o explorare ulterioară, precum și probleme care anticipează oarecum munca omului de știință.

Iată o indicație practică: dacă problema pe care vreți s-o discutați în clasă este potrivită, lăsați-i pe elevi să facă unele explorări preliminare; aceasta le-ar putea deschide pofta pentru soluția formală. Și rezervați un anumit timp discutării retrospective a soluției obținute; aceasta ar putea fi util pentru probleme ulterioare.

4. După această discuție cu totul incompletă, trebuie să întrerup expunerea celor trei principii: învățarea activă, motivarea optimă și fazele consecutive. Cred că aceste trei principii își pot găsi loc în detaliile muncii de toate zilele a profesorului, făcînd din el un profesor mai bun. Cred de asemenea că aceste trei principii trebuie să-și găsească loc și în planificarea ansamblului cursului, în planificarea fiecărei părți a cursului și în planificarea fiecărui capitol.

Departe de mine gîndul că ați fi obligați să acceptați aceste principii. Aceste principii derivă dintr-o anumită viziune de ansamblu, dintr-o anumită filozofie, și puteți avea o filozofie diferită de a mea. Însă, în predare, ca și în multe alte lucruri, nu contează prea mult ceea ce este sau nu este filozofia dumneavoastră. Contează mai mult dacă

aveți sau nu o filozofie. Și contează foarte mult dacă încercați să vă călăuziți sau nu după această filozofie. Singurele principii ale predării care-mi displac total sînt cele pe care oamenii se mulțumesc doar să le enunțe în mod nesincer.

6. Exemple. Exemplele sînt preferabile preceptelor; îngăduiți-mi să trec la exemple, care îmi plac mai mult decît discuțiile generale. Mă interesează aici, în principal, predarea în școala medie și vă voi prezenta cîteva exemple de la acest nivel. Găsesc adesea o satisfacție în cercetarea unor exemple la nivelul școlii medii și vă voi spune de ce: încerc să le tratez în așa fel, încît ele să-mi readucă în minte într-o privință sau alta, propria mea experiență matematică; reactualizez, la o scară redusă, munca mea din trecut.

1. *O problemă de clasa a VII-a.* Forma artistică fundamentală a predării este dialogul socratic. Într-o clasă să zicem într-a VII-a, profesorul poate începe dialogul astfel:

„Ce oră este la amiază la San Francisco?"

„Dar, d-le profesor, asta o știe oricine" — poate să spună un elev mai vioi, sau chiar — „Dar, d-le profesor, sînteți absurd: ora 12".

„Și ce oră este la amiază la Sacramento?"

„Evident, ora 12 la prînz, și nu 12 de la miezul nopții"

„Și cît e ceasul la prînz la New York"?

„Douăsprezece".

„Dar eu credeam că San Francisco și New York nu au amiaza în același moment, iar voi spuneți că ambele au amiaza la orele douăsprezece!"

„Da, San Francisco are amiaza la orele douăsprezece după timpul standard occidental, iar New York-ul la orele douăsprezece după timpul standard oriental".

„Și cărui standard al timpului îi aparține Sacramento, oriental sau occidental?"

„Bineînțeles, occidental".

„La San Francisco și la Sacramento este amiază în același moment?"

„Nu știți răspunsul? Bine, încercați să-l ghiciți: amiaza se produce mai devreme la San Francisco sau la Sacramento, sau se produce cumva în aceeași clipă în ambele locuri?"

Cum vă place ideea mea de discuție socratică cu copiii dintr-a VII-a? În orice caz, vă puteți închipui restul. Prin întrebări adecvate, profesorul, imitîndu-l pe Socrate, trebuie să scoată de la elevi mai multe lucruri:

(a) Trebuie să facem distincție între amiaza „astronomică" și amiaza convențională sau „legală".

(b) Definițiile celor două feluri de amiază.

(c) Înțelegerea timpului „standard": cum și de ce este împărțită suprafața globului în zone de timp?

(d) Formularea problemei: „La ce oră a timpului standard occidental are loc amiaza astronomică la San Francisco?"

(e) Singura dată specifică necesară pentru rezolvarea problemei este longitudinea orașului San Francisco (cu aproximația suficientă în clasa a VII-a).

Problema nu este prea ușoară. Am experimentat-o în două clase; în ambele elevii erau profesori de școală medie. O clasă a avut nevoie de vreo 25 minute pentru a obține soluția, celeilalte i-au trebuit 35 de minute.

2. Trebuie să spun că această mică problemă de clasa a VII-a prezintă diverse avantaje. Principalul ei avantaj este că subliniază o operație mintală esențială care este foarte neglijată în materialul obișnuit de probleme din manuale: *recunoașterea noțiunii matematice esențiale într-o situație concretă*. Pentru a rezolva problema, elevii trebuie să-și dea seama de o *proporționalitate*: momentul culminației Soarelui într-o localitate de pe suprafața globului variază *proporțional* cu longitudinea localității.

În adevăr, comparată cu cele mai dificile probleme artificiale din manualele de școală medie, problema noastră este perfect naturală, este o problemă „reală". În problemele serioase de matematică aplicată, *formularea* adecvată a problemei este întotdeauna sarcina majoră și adesea sarcina cea mai importantă; mica noastră problemă, care poate fi propusă unei clase a VII-a oarecare, are tocmai acest caracter. Iarăși, problemele serioase de matematică aplicată pot îndruma spre o acțiune practică, de exemplu, spre adoptarea unui proces de fabricație mai bun; mica noastră problemă le poate explica elevilor dintr-a VII-a de ce a fost adoptat sistemul celor 24 zone de timp, fiecare cu un timp standard uniform. În ansamblu, cred că această problemă, mînuită cu un pic de abilitate de către profesor, ar putea ajuta pe un viitor cercetător sau inginer să-și descopere vocația și ar putea contribui, de asemenea, la maturizarea intelectuală a elevilor care nu vor face uz de matematică în profesiunea lor.

Mai observați că această problemă ilustrează mai multe dintre micile artificii menționate anterior: elevii contribuie acum la formularea problemei [cf. 5 (1)]. În adevăr, faza de

explorare, care conduce la formularea problemei, este de o deosebită importanță [cf. 5(3)]. Apoi, elevilor li se cere să ghicească un punct esențial al soluției [cf. 5(2)].

3. *O problemă de clasa a X-a.* Să luăm un alt exemplu. Vom porni de la ceea ce este, probabil, cea mai familiară problemă de construcție geometrică: *să se construiască un triunghi ale cărui laturi sînt date.* Cum analogia este o sursă de invenție atît de fertilă, este natural să punem întrebarea: Care este problema analogă în geometria în spațiu? Un elev mijlociu, care posedă unele cunoștințe de geometrie în spațiu poate fi condus să enunțe problema: *Să se construiască un tetraedru, ale cărui muchii sînt date.*

Menționăm între paranteze că această problemă cu tetraedrul este extrem de apropiată de nivelul uzual în școala medie al problemelor practice rezolvate prin „desen mecanic". Inginerii și proiectanții folosesc desene bine executate pentru a da informație precisă asupra detaliilor figurilor tridimensionale ale mașinilor sau ale elementelor de construcție: noi intenționăm să construim un tetraedru cu muchii dinainte stabilite. Am putea dori, bunăoară, să ni-l tăiem din placaj.

Aceasta ne face să cerem ca problema să fie rezolvată cu precizie, cu ajutorul riglei și al compasului, și să discutăm următoarea problemă: ce elemente ale tetraedrului urmează să fie construite? Dintr-o discuție bine călăuzită în clasă ar putea rezulta, eventual, următoarea formulare definitivă a problemei:

Se dau lungimile celor șase muchii

$$AB,\ BC,\ CA,\ AD,\ BD,\ CD$$

ale tetraedrului $ABCD$. Să se considere ΔABC ca bază a tetraedrului și să se construiască cu rigla și cu compasul unghiurile pe care baza le face cu celelalte trei fețe.

Cunoașterea acestor trei unghiuri este necesară pentru a decupa din placaj corpul dorit. Și alte elemente ale tetraedrului pot interveni în discuție, cum ar fi:

a) înălțimea coborîtă din vîrful D pe baza opusă,

b) piciorul F al acestei înălțimi în planul bazei;

(a) și (b) vor contribui la cunoașterea corpului, ele ne-ar putea ajuta să găsim unghiurile cerute și, de aceea, am putea încerca să le construim și pe acestea.

4. Desigur, putem construi cele patru fețe triunghiulare, prezentate în fig. I. (Arcele de cerc din construcție arată că $AD_2 = AD_3$, $BD_3 = BD_1$, $CD_1 = CD_2$.) Dacă fig. I este

copiată pe carton, putem adăuga trei aripioare, putem decupa figura să o pliem în lungul celor trei linii și să lipim aripioarele; obținem astfel un model în spațiu, pe care putem măsura cu aproximație înălțimea și unghiurile care ne interesează. O astfel de lucrare în carton este foarte sugestivă, dar nu aceasta ni se cere: noi trebuie să construim înălțimea, piciorul ei și unghiurile respective, cu ajutorul riglei și al compasului.

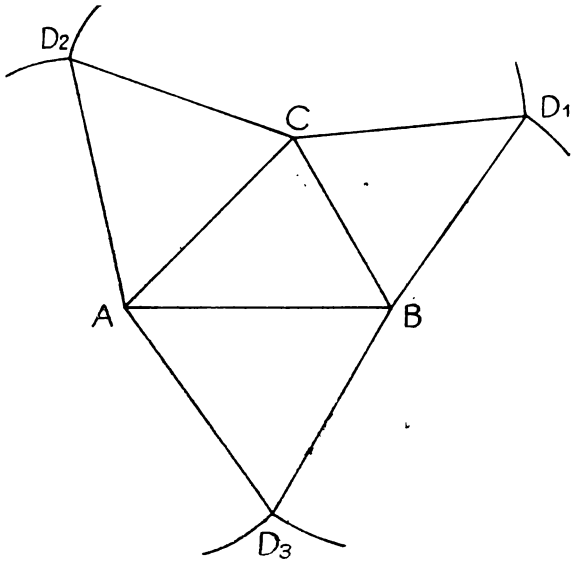

Fig. I

5. S-ar putea dovedi util să considerăm problema sau o anumită parte a ei „ca fiind rezolvată". Să vedem cum va arăta fig. I, dacă cele trei fețe laterale, după rotirea lor în jurul cîte unei laturi a bazei vor fi aduse în poziția lor. Fig. II ne înfățișează proiecția ortogonală a tetraedrului pe planul bazei sale, ABC. Punctul F este proiecția vîrfului D: el este piciorul înălțimii coborîte din D.

6. Putem ilustra trecerea de la fig. I la fig. II cu ajutorul unui model de carton, sau și fără acesta. Să ne concentrăm atenția asupra uneia dintre cele trei fețe laterale, BCD_1,

care se afla inițial în același plan ca și ABC, în planul fig. I, pe care ni-l închipuim orizontal. Să observăm triunghiul BCD_1 în timp ce se rotește în jurul laturii fixe BC și să urmărim

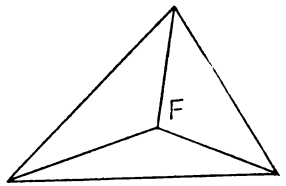

Fig. II

numai vîrful mobil D_1. Acest vîrf D_1 descrie un arc de cerc. Centrul acestui cerc este un punct de pe BC; planul acestui

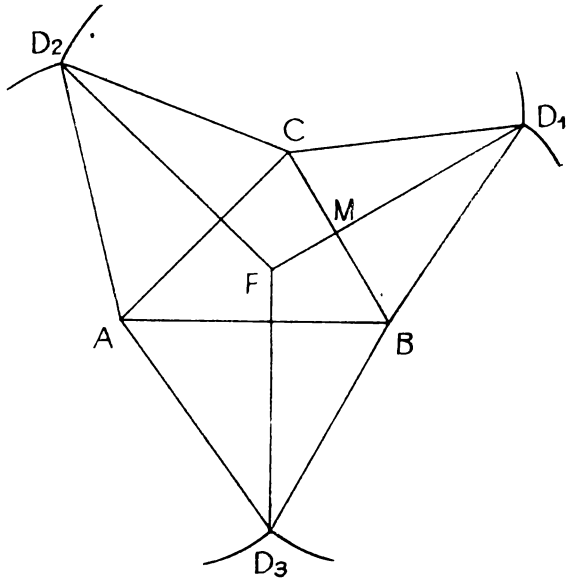

Fig. III

cerc este perpendicular pe axa de rotație orizontală BC; așadar, D_1 se mișcă într-un plan vertical. De aceea, proiec-

ția traiectoriei pe care-o parcurge vîrful mobil D_1, pe planul orizontal al fig. I, este o dreaptă perpendiculară pe BC și care trece prin poziția inițială a lui D_1.

Dar mai există alte două triunghiuri care se rotesc, în total trei. Avem trei vîrfuri mobile, care se mișcă pe cîte un drum circular într-un plan vertical, — spre ce destinație?

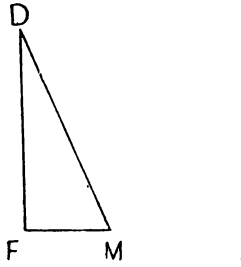

Fig. IV

7. Cred că cititorul a ghicit de pe acum rezultatul (poate că încă înainte de a fi citit pînă la capăt punctul precedent): cele trei linii drepte duse din pozițiile inițiale (vezi fig. I) ale punctelor D_1, D_2 și D_3, perpendicular pe laturile BC, CA și AB respectiv, se întîlnesc într-un punct, punctul F pe care trebuie să-l aflăm în mod suplimentar (b), vezi fig. III. (Este suficient să ducem două perpendiculare pentru a determina pe F, dar o putem folosi pe a treia pentru a verifica precizia desenului.) Ceea ce ne mai rămîne de făcut este ușor. Fie M punctul de intersecție al segmentelor D_1F și BC (vezi fig. III). Construim triunghiul dreptunghic FMD (vezi fig. IV), de ipotenuză $MD = MD_1$ și avînd cateta MF. Evident, FD este înălțimea [punctul nostru suplimentar (a)] și $\sphericalangle FMD$ măsoară unghiul diedru format de baza ΔABC și de fața laterală ΔDBC, pe care-l cerea problema noastră.

8. Unul dintre meritele unei probleme bune constă în a genera alte probleme bune.

Soluția precedentă poate și trebuie să ne lase în minte o îndoială. Am găsit rezultatul reprezentat în fig. III (că cele trei perpendiculare de mai sus sînt concurente), considerînd mișcarea unor corpuri în rotație. Dar rezultatul este o propoziție geometrică și, ca atare, ar trebui stabilit independent de ideea de mișcare, pe cale pur geometrică.

Or, este relativ ușor să eliminăm din considerațiile de mai sus [punctele (6) și (7)] ideea de mișcare și să stabilim rezultatul cu ajutorul unor idei din geometria în spațiu (intersecție de sfere, proiecția ortogonală). Dar rezultatul este o propoziție din geometria plană și, ca atare, el ar trebui stabilit independent de ideile geometriei în spațiu, numai cu ajutorul geometriei plane. (Cum?)

9. Remarcați că și această problemă de clasa a X-a ilustrează diverse puncte ale predării discutate anterior. De exemplu, elevii pot și trebuie să participe la formularea definitivă a problemei, există aici o fază de explorare și un fond bogat.

Și iată acum punctul pe care vreau să-l subliniez: problema este de natură să merite atenția elevilor. Deși ea nu este legată atît de experiența zilnică ca problema de clasa a VII-a, ea pornește de la cunoștințe cu care elevul este mai familiar (construcția unui triunghi de laturi date), impune de la început o ideie de interes general (analogia) și îndrumă spre eventuale aplicații practice (desenul mecanic). Cu un pic de pricepere și de bunăvoință, profesorul trebuie să fie capabil de a cîștiga pentru această problemă atenția tuturor elevilor care nu sînt iremediabil proști.

7. A învăța să predăm. Mai rămîne un punct de discutat, și anume unul important: pregătirea profesională a profesorului. În discutarea acestei probleme, am o poziție avantajoasă: pot aproape să fiu de acord cu punctul de vedere „oficial". [Mă refer aici la „Recomandări ale Asociației de matematică din America pentru pregătirea profesorilor de matematică", în *The American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 982—991. Îmi iau libertatea de a cita acest document ca „recomandările oficiale", numai pentru a mă exprima mai succint.] Mă voi ocupa numai de două puncte. Acestor două puncte le-am consacrat multă muncă și meditație în trecut și practic, toată activitatea mea didactică din ultimii 10 ani.

Enunțînd într-un mod aproximativ, unul dintre cele două puncte pe care le am în vedere se referă la „materia de predat", iar celălalt, la „metodele" de predare.

1. *Materia de predat.* Este trist, dar în prezent unanim recunoscut, că profesorii de matematică din școala medie au, în general, cunoștințe insuficiente în domeniul materiei pe care o predau. Fără îndoială, există profesori bine pregătiți care predau în școli medii, dar există alții (am întîlnit mulți) a căror bunăvoință sînt nevoit s-o admir, dar a căror pregă-

tire matematică nu este de admirat. Recomandările oficiale referitoare la materia de predat nu sînt poate perfecte, dar este în afară de orice îndoială că acceptarea lor ar avea ca rezultat o îmbunătățire substanțială. Aș vrea să vă îndrept atenția spre un punct care, după părerea mea, ar trebui adăugat la recomandările oficiale.

Cunoștințele noastre asupra oricărui subiect constă din informație și din „a ști cum". „A ști cum" este priceperea de a utiliza informația; firește, această pricepere nu există fără gîndire independentă, fără originalitate, fără spirit creator. În matematică „a ști cum" este abilitatea de a rezolva probleme, de a găsi demonstrații, de a analiza argumentări, de a utiliza destul de curgător limbajul matematic, de a recunoaște noțiuni matematice în situații concrete.

Oricine este de acord că în matematică priceperea este mai importantă sau chiar mult mai importantă decît simpla posedare a informației. Oricine cere ca școala medie să comunice elevilor nu numai informație în matematică, ci și priceperi, independență, originalitate, spirit creator. Totuși, aproape nimeni nu pretinde aceste lucruri frumoase pentru profesorul de matematică; nu este oare uimitor? Recomandările oficiale trec sub tăcere priceperile matematice ale profesorului. Studentul în matematică care lucrează la teza de doctorat trebuie să facă cercetări, și chiar înainte de a ajunge la acest stadiu el poate avea anumite ocazii de a lucra independent la seminarii, la cercurile de probleme sau la pregătirea tezei de diplomă. Nu i se oferă însă o astfel de ocazie viitorului profesor de matematică, recomandările oficiale nu spun nici un cuvînt despre o astfel de muncă independentă sau de cercetare. Dacă însă profesorul nu are nici un fel de experiență în vreo muncă de creație, cum va fi el capabil să inspire, să călăuzească, să ajute sau chiar să aprecieze activitatea creatoare a elevilor săi? Un profesor care a acumulat ceea ce știe în matematică doar pe cale receptivă, va putea cu greu să promoveze învățarea activă a elevilor săi. Un profesor care n-a avut niciodată o ideie strălucită în viața lui, îl va certa probabil pe elevul care a avut o astfel de idee, în loc să-l încurajeze.

După părerea mea, aceasta poate fi cea mai gravă lacună în pregătirea profesorului mijlociu de școală medie: el nu are experiența unei activități matematice independente și, de aceea, el nu poate stăpîni în mod real nici măcar materialul de școală medie pe care urmează să-l predea.

Nu am nici un leac de oferit, dar am încercat un anumit lucru. Am introdus și am condus de mai multe ori cîte un *seminar de rezolvat probleme* pentru profesori. Problemele propuse la acest seminar nu cer cunoștințe care să depășească mult nivelul școlii medii, dar ele presupun un anumit grad — și, din cînd în cînd, un grad mai înalt — de concentrare și de judecată și, la acest grad, soluția este o muncă „de creație". Am încercat să-mi organizez în așa fel seminarul, încît elevii să fie capabili de a utiliza în clasele lor, cît mai mult din materialul predat, fără modificări prea mari; ca ei să dobîndească o oarecare măiestrie în matematica de școală medie; și chiar ca ei să aibă oarecare ocazii de a face exerciții de predare (predîndu-și unii altora, în grupe mici). Nu pot intra aici în detalii; am dat o descriere amănunțită într-o carte publicată recent (vezi bibliografie, 2).

2. *Metode.* Din contactul meu cu sute de profesori de matematică am ajuns la impresia că cursurile de „metodică" sînt primite adesea cu destul de puțin entuziasm. Dar tot așa sînt primite de profesori cursurile uzuale pe care le fac pentru ei facultățile de matematică. Un profesor cu care am vorbit de la om la om despre aceste probleme, a găsit o expresie plastică pentru un sentiment destul de răspîndit: „Facultatea de matematică ne oferă o carne tare, pe care nu o putem mesteca, iar cursurile de calificare, o supă anostă, fără carne".

În fapt, ar trebui să avem o dată curajul de a discuta public problema: sînt oare cursurile de medotică cu adevărat necesare? Sînt ele de vreun folos? Avem mai multe șanse să ajungem la un răspuns corect printr-o discuție deschisă decît prin bodogănelile atît de larg răspîndite.

Există cu certitudine destule întrebări de actualitate. Este predarea predabilă? (Predarea este o artă, după cum cred mulți dintre noi, și poate fi oare predată o artă?) Există oare ceea ce se cheamă metodă de predare? (Ceea ce profesorul predă nu este niciodată mai bun decît ceea ce profesorul este — predarea depinde de întreaga personalitate a profesorului, există tot atîtea metode bune cîți și profesori buni.) Timpul afectat pregătirii profesorilor este împărțit între cursuri de matematică, cursuri de metodică și predare practică; este oare cazul să cheltuim mai puțin timp cu cursurile de metodică? (Mai multe țări europene le acordă incomparabil mai puțin timp.)

Sper că oameni mai tineri și mai viguroși decît mine se

vor ocupa cîndva de aceste întrebări și le vor discuta cu mintea deschisă și pe baza unor date potrivite.

Vorbesc aici numai despre propria mea experiență și despre propriile mele păreri. În fapt, la ora actuală, am și răspuns implicit la principala întrebare pe care am pus-o: cred că cursurile de metodică pot fi utile. În adevăr, ceea ce v-am prezentat în acest capitol a fost un eșantion de curs de metodică sau, mai curînd, un fir conducător de principii care, după părerea mea, trebuie să fie tratate de un curs de metodică pentru profesorii de matematică.

În adevăr, toate lecțiile pe care le-am ținut pentru profesorii de matematică erau menite să fie, pînă la un anumit punct, cursuri de metodică. Titlul lecției menționa un anumit material, iar timpul era împărțit efectiv între acest material și metode; poate 9/10 pentru material și 1/10 pentru metode. Dacă a fost posibil, i-am dat lecției forma unui dialog. Anumite observații de metodică au fost inserate incidental, de către mine sau de către auditori. Dar, deducerea unui fapt sau rezolvarea unei probleme erau aproape regulat urmate de o scurtă discuție despre implicațiile pedagogice. „Ați putea folosi aceasta în clasele dumneavoastră?" — îi întrebam pe ascultători. „În ce stadiu al cursului din școala medie ați putea-o utiliza? Ce punct necesită o atenție deosebită? Cum ați încerca să o scoateți la capăt?" Întrebări de această natură (particularizate într-un mod adecvat) au fost puse cu regularitate și în lucrările de examen. Activitatea mea principală a constat însă în a alege probleme (ca cele două prezentate aici) care să ilustreze clar cîte o metodă de predare.

3. Recomandările oficiale denumesc cursurile de „metode" cursuri de „studiu al cursului din școala medie" și nu sînt prea elocvente în această privință. Puteți găsi însă acolo o recomandare pe care o consider excelentă. Dar este aici ceva ascuns; trebuie să adunați două și cu două, combinînd ultima frază din „studiul cursului de școală medie" și recomandările pentru Nivelul IV. Dar este destul de clar: un profesor din învățămîntul superior care face un curs de metode pentru profesorii de matematică din școala medie trebuie să știe matematică cel puțin la nivelul unui licențiat. Aș vrea să adaug că el ar trebui să aibă și o oarecare experiență, fie chiar modestă, în domeniul cercetării matematice. Dacă el nu are astfel de experiență, cum poate el arăta ce este lucrul cel mai important pentru viitorii profesori, spiritul muncii creatoare?

Ați ascultat destul amintirile unui om bătrîn. Din această discuție ar putea să iasă ceva bun și concret, dacă v-ați gîndi puțin la următoarele propuneri: Propun ca următoarele două puncte să fie adăugate la recomandările oficiale ale Asociației:

I. *Pregătirea profesorilor de matematică trebuie să le ofere experiență în munca independentă („creatoare") la un nivel potrivit, sub forma unui Seminar de rezolvat probleme, sau la vreo altă formă adecvată.*

II. *Cursurile de metodică ar trebui făcute numai în strînsă legătură fie cu cursurile de material de predat fie cu practica de predare și, pe cît posibil, să fie ținute de profesori care au experiență atît în cercetarea matematică, cît și în predare.*

BIBLIOGRAFIE

1. E. R. Hilgard, *Theories of Learning*, ed. 2, Appleton-Century-Crofts, New York, 1956.
2. G. Pólya, *Mathematical Discovery*, vol. 1, Wiley, New York, 1962.

CUPRINSUL

Din prefaţa la primul tiraj 5
Din prefaţa la tirajul al şaptelea 7
Prefaţă la ediţia a doua 9
Cum rezolvăm o problemă? 10
Cum rezolvăm o problemă? (Variantă prescurtată) 12
Introducere 13

Partea I
ÎN CLASĂ

Scopul 17
1. Să-l ajutăm pe elev 17
2. Întrebări, recomandări, operaţii intelectuale 17
3. Generalitatea 18
4. Bunul simţ 18
5. Profesor şi elev. Imitaţie şi experienţă 19
Diviziuni principale, întrebări principale 20
6. Cele patru faze 20
7. Înţelegerea problemei 21
8. Exemplu 22
9. Întocmirea unui plan 23
10. Exemplu 24
11. Realizarea planului 26
12. Exemplu 27
13. Privire retrospectivă 28
14. Exemplu 29
15. Căi de acces diferite 32
16. Metoda profesorului de a pune întrebări 33
17. Întrebări bune şi întrebări proaste 34
Alte exemple 35
18. O problemă de construcţie 35
19. O problemă de demonstrat 37
20. O problemă de determinare a vitezei unui proces 40

Partea a II-a
CUM REZOLVĂM O PROBLEMĂ?

Dialog 47

Partea a III-a
SCURT DICŢIONAR DE EURISTICĂ

Am mai întîlnit cîndva această problemă? 53
Analizaţi-vă conjectura 53
Analogia 57
Au fost utilizate toate datele? 65
Bolzano, Bernhard 67
Care este necunoscuta? 67
Ce rost au demonstraţiile? 68
Cititorul inteligent 74
Condiţia 75
Contradictorie* 75
Corolar 75
Cunoaştem vreo problemă înrudită? 75
Dacă nu puteţi să rezolvaţi problema 76
Definiţia 77
Descartes René 82
Descompunerea şi recombinarea 82
Diagnostic 90
Elemente auxiliare 91
Enigme şi jocuri 95
Euristica 96
Euristica modernă 97
Fermitate, speranţă, succes 101
Figurile 102
Generalizarea 106
Iată o problemă înrudită cu a noastră şi rezolvată anterior 107
Idcea revelatoare 108
Indicii de progres 110
Inducţia şi inducţia matematică 120
Înţelepciunea proverbelor 126
Leibniz, Gottfried Wilhelm 130
Lema 130
Modificări ale problemei 130
Munca subconştientului 134
Notaţiile 136
Omul inteligent, rezolvînd o problemă 141
Pappus 142
Paradoxul inventatorului 148

Particularizarea 148
Pedanteria și măiestria 153
Poate fi satisfăcută condiția? 154
Problema auxiliară 155
Probleme de aflat, probleme de demonstrat 160
Probleme practice 162
Probleme de rutină 166
Profesorul de matematică tradițional 167
Progrese și reușită 167
Punerea în ecuație 170
Raționamentul euristic 173
Realizarea planului 174
Redondantă* 177
Reducerea la absurd și demonstrația indirectă 177
Reguli de stil 184
Reguli pentru a face descoperiri 185
Reguli pentru profesor 185
Reluarea problemei, de la sfîrșit spre început 185
S-ar putea reformula problema?* 191
Să cercetăm necunoscuta 191
Să facem un desen* 197
Să separăm diversele părți ale condiției 197
Se poate deduce ceva util din datele problemei? 197
Se poate folosi rezultatul? 199
Se poate obține rezultatul și pe altă cale? 202
Se poate verifica rezultatul? 204
Simetria 206
Termenii vechi și noi 207
Verificarea cu ajutorul dimensiunii 209
Viitorul matematician 211

Partea a IV-a

PROBLEME, INDICAȚII, SOLUȚII

Probleme 216
Indicații 219
Soluții 222
Anexă 233

Redactor resp. de carte: MARIA MANOLESCU
Tehnoredactor: GHEORGHE POPOVICI

Dat la cules 25.08.1964. Bun de tipar 27.01.1965. Tiraj 18 000 + 130 ex. + 20 ex. lux. Hîrtie scris II A. 63 g/m². Format 54×84/16. Coli editoriale 14,04. Coli tipar 16,00. A. 11748. Indici de clasificare zecimală: pentru bibliotecile mari 51, pentru bibliotecile mici 51.

Tiparul executat sub comanda nr. 40 674 la Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii", Piața Scînteii nr. 1, București — R.P.R.